GE2 - Tutorato III - Lunedì 13 ottobre 2003d.C.
tutori Federico Coglitore e Chiara Valenti

1. Sia V un $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale euclideo (finito) con il prodotto scalare standard. Sia W un sottospazio di V non vuoto.
   (a) Dimostrare che $W^\perp$ è un sottospazio vettoriale.
   (b) Dimostrare che $W \cap W^\perp = \{0\}$.
   (c) Utilizzando il teorema di Gram-Schmidt dimostrare che $V = W \oplus W^\perp$.
   (d) Se $v = v' + v''$ con $v' \in W$ e $v'' \in W^\perp$ si definisca $P(v) = v'$. Dimostrare che P è un operatore lineare da V in V. P si dice operatore proiezione ortogonale di V su W (giustificare la definizione di P interpretandola geometricamente).
   (e) Sia ora $V = \mathbb{R}^3$ e W il sottospazio di equazioni cartesiane, rispetto alla base canonica $\mathbb{E}$, $x - y = 0$. Determinare la matrice di P rispetto ad $\mathbb{E}$.
   (f) Determinare una base ortonormale di W e completarla fino ad ottenere una base ortonormale $\mathbb{F}$ di $\mathbb{R}^3$.
   (g) Scrivere la matrice di P in base $\mathbb{F}$.

2. Usando l'algoritmo di Lagrange diagonalizzare (trovando una base diagonalizzante) le seguenti forme quadratiche $q(X, Y, Z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:
   (a) $2XY - 2XZ + 4YZ$
   (b) $X^2 + Z^2 - 2XY - 2XZ + 2YZ$

3. Come nell'esercizio precedente usando, però, il metodo di Gauss-Jordan simmetrico.
   (a) $XY + Y^2 + 4XZ + Z^2$
   (b) $2X^2 - 8XY + Y^2 - 16XZ + 14YZ + 5Z^2$

4. Usando il metodo di Gram-Schmidt trovare una base ortonormale per le forme bilineari polari delle seguenti forme quadratiche $q(X, Y, Z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Prima assicurarsi, usando il teorema di Jacobi-Sylvester, che esse sono definite positive.
   (a) $2X^2 + 2XY + 2Y^2 - 2XZ + Z^2$
   (b) $2X^2 + 2XY + Y^2 + 2Z^2$

5. (*)

   (a) Applicare il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt all'insieme infinito di vettori di $\mathbb{R}^3$ $(1, n, n^2) \forall n \in \mathbb{N}$.

   (b) Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt si costruisca una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ (con prodotto scalare standard) il cui primo vettore sia un multiplo di $(1, -1, 1, 1)$.

   (c) Si consideri lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$ con prodotto scalare standard. Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operatore lineare definito da una matrice simmetrica. Dimostrare che comunque presi due autovettori con autovalori distinti essi sono ortogonali.

   (d) Sia V uno spazio vettoriale euclideo con prodotto scalare standard, e v, w due suoi vettori. Dimostrare che se $|v| = |w|$ allora $(v + w) \perp (v - w)$. Interpretare questa formula geometricamente.