GE2 - Tutorato II - Lunedì 6 ottobre 2003 d.C.
tutori Federico Coglitore e Chiara Valenti

1. Sia q la forma quadratica rappresentata nella base canonica $E = (e_1, e_2, e_3)$ di $\mathbb{R}^3$ da $Q(X) = 4X_1X_2 - 2X_1X_3 + 4X_2X_3 + X_2^2$

   (a) Scrivere la matrice A della forma bilineare simmetrica polare b associata a q

   (b) Verificare che il vettore $x_0 = (-1, 3, 2)$ non è b-isotropo

   (c) Determinare due vettori y' e y'' $\in \mathbb{R}^3$ tali che $y' + y'' = e_2$ con $y' \| x_0$ e $y'' \perp x_0$

   (d) Determinare equazioni cartesiane e parametriche di $e_2^{\perp}$ e due suoi generatori.

2. Sia $Q(X) = -2X_2^2$ l'espressione rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ di una forma quadratica

   (a) Scrivere la matrice A della forma bilineare simmetrica polare b associata a q

   (b) Verificare che b è degenere e determinare un vettore non nullo $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ortogonale ad ogni vettore $v \in \mathbb{R}^2$

   (c) Determinare l'insieme dei vettori isotropi di b.

3. Sia P lo spazio vettoriale reale dei polinomi di grado $\leq n$.

   (a) Siano $f, g \in P$. Dimostrare che $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ è un prodotto scalare.

   (b) Sia $n = 3$. Trovare una base ortogonale di P.

4. Rispondere alle seguenti domande (b è una forma bilineare simmetrica su V, $\mathbb{R}$-spazio vettoriale)

   (a) Se b è non nulla, può essere che tutti i vettori di V siano isotropi?

   (b) Siano $u, v \in V$. Dimostrare che se $b(u, v) = 0$ con u, v non isotropi, allora u e v sono linearmente indipendenti.

   (c) Dire che b è un prodotto scalare equivale a dire che b non ha vettori isotropi non banali?

   (d) Sia A la matrice di b in una certa base $\mathbb{E}$. E' vero che gli autovalori di A sono indipendenti dalla base scelta?

(e) Se le colonne di una matrice A $n \times n$ formano una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare standard), anche le righe lo fanno?

(f) E'vero che il massimo numero di una matrice simmetrica definita positiva si trova sempre sulla diagonale?

5. Si determini la segnatura delle seguenti forme quadratiche su $\mathbb{R}^3$ dopo aver trovato una base ortogonale usando sia l'algoritmo di Lagrange, sia il metodo di Gauss-Jordan simmetrico:

   (a) $Q(X, Y, Z) = 2XY + 2YZ$

   (b) $Q(X, Y, Z) = Y^2 + 2XZ$

   (c) $Q(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2XY + 2XZ + 2YZ$

   (d) $Q(X, Y, Z) = 2X^2 + 2XY + Y^2 + +2XZ + 3Z^2$