UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Seconda prova di esonero - a.a. 2002-2003

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $F : V \to V$ un'applicazione lineare.
(a) Si definiscano le nozioni di autovalore, autovettore e di polinomio caratteristico di F;
(b) Si enunci il risultato che relaziona gli autovalori, gli autospazi ed il polinomio caratteristico di F;
(c) si dimostri tale risultato.

2. In uno spazio affine di dimensione 3 sia O, e_1, e_2, e_3, un riferimento affine. Sia p il piano di equazione $X - Y + Z = 0$ e si considerino la retta $\mathcal{R}$ di equazioni cartesiane

$$\mathcal{R} : \begin{cases} X - Y - 1 = 0 \\ X - 2Y + 2 = 0 \end{cases}$$

e, al variare del numero reale a, la retta $\mathcal{R}_a$ passante per $P(1, -1, 0)$ e con vettore di direzione $v = ae_1 + e_2 - e_3$.
(a) Esiste un piano che contiene tutte e due le rette per qualche valore di a?
(b) Si determinino i valori di a per cui esiste un piano affine q tale che q è parallelo a p, q contiene $\mathcal{R}_a$ e q non contiene $\mathcal{R}$. In tal caso si determini l'equazione cartesiana di q.
(c) Si determinino i valori di a per cui esiste un piano affine q tale che q è parallelo a p, q contiene $\mathcal{R}_a$ e q contiene $\mathcal{R}$. In tal caso si determini l'equazione cartesiana di q.

3. Siano U, V e W tre spazi vettoriali reali e siano $G : U \to V,\ F : V \to W$ due applicazioni lineari.

(a) Si dimostri che se $F \circ G$ è suriettiva allora F è suriettiva;

(b) si supponga ora che F è suriettiva. Si dimostri che $F \circ G$ è suriettiva se e solo se $N(F) + \mathrm{Im}G = V$;

(c) si costruisca un esempio esplicito in cui $F \circ G$ è suriettiva e $N(F) \oplus \mathrm{Im}G = V$.

4. Sia α un numero reale e $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che, considerata la base canonica $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ di $\mathbb{R}^4$, si ha

$$F(E_1) = E_2, F(E_2) = -2E_2, F(E_3) = E_1 + E_3, F(E_4) = E_1 + \alpha E_4.$$

(a) Determinare la matrice A di F rispetto alla base canonica;

(b) trovare, per ogni α, basi per gli autospazi di F;

(c) determinare i valori di α per i quali esiste una matrice $P \in GL_4(\mathbb{R})$ ed una matrice diagonale D tali che $D = P^{-1}AP$.

5. Sia A uno spazio affine di dimensione $n \geq 5$ e siano S un un sottospazio di A di dimensione $n-2$ e T un sottospazio di A di dimensione $n-3$. Si dimostri che tre soli casi sono possibili:

(a) S è parallelo a T;

(b) $S \cap T \neq \emptyset$ e dim $S \cap T = n-5$;

(c) S non è parallelo a T e o $S \cap T = \emptyset$ oppure $S \cap T \neq \emptyset$ e dim $S \cap T = n-4$.