UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prova scritta del 18-9-2004 - a.a. 2003-2004

1. Sia V uno spazio vettoriale, U, W due suoi sottospazi.

(a) Si enunci il risultato che relaziona le dimensioni di $U \cap W$ e di $U + W$;

(b) si dimostri tale risultato.

2. Determinare per quali valori $h \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + hX_4 = 0 \\ hX_1 + X_3 - X_4 = 1 \\ -X_1 + X_2 - X_4 = h \\ X_1 + hX_2 + X_3 = 1 \end{cases}$$

e calcolarne esplicitamente le soluzioni, utilizzando esclusivamente operazioni elementari.

3. Sia k un numero reale e si considerino le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino i valori di k per i quali A può essere trasformata in B con sole operazioni elementari;

(b) per i valori di k individuati sopra, si determini una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B.

4. Siano k un numero reale, $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ y + w = 0 \end{cases}$$

e $U_k \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale

$$U_k = < (1,0,1,2), \ (1,0,0,1), \ (2,0,1,k) > .$$

(a) Si determinino due basi di W e U_k;

(b) si determinino le dimensioni di $U_k + W$ e di $U_k \cap W$;

(c) si determinino (se esistono) i valori di k per i quali

$$U_k \oplus W = \mathbb{R}^4.$$

5. Siano V, W due spazi vettoriali reali e $F : V \to W$ un'applicazione lineare.

(a) Si definiscano il nucleo e l'immagine di F e se ne indichino le proprietà;

(b) si enunci il teorema di omomorfismo tra spazi vettoriali;

(c) si dimostri tale risultato.

6. Sia a un numero reale e sia A uno spazio affine di dimensione 3 su uno spazio vettoriale reale V e sia O, e_1, e_2, e_3 un riferimento affine. Si considerino i tre piani di equazione:

$$\pi_1 : X_1 - X_2 + X_3 + 1 = 0; \pi_2 : X_2 - X_3 + 2 = 0; \pi_3 : 2X_1 - 3X_2 + 3X_3 = a.$$

(a) Si determinino i valori di a per i quali i tre piani appartengono allo stesso fascio;

(b) Per tali valori di a si scrivano le equazioni della retta comune in forma parametrica;

(c) Si determinino i valori di a per i quali esiste un piano parallelo a π_3 ma che non interseca $\pi_1 \cap \pi_2$.

7. Sia M_2 lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 e $F : M_2 \to M_2$ l'applicazione definita da

$$F(A) = AB,$$

dove B è la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Dimostrare che F è lineare e calcolare una matrice di F;

(b) determinare $N(F), Im(F)$ e le loro dimensioni;

(c) F è iniettiva?

8. Siano $v_1 = (1, 0, 1, -1), v_2 = (1, 1, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che $v_1 + v_2 \in N(F), v_1 - E_1 \in N(F), F(E_3) = -kE_3, F(v_1) = kE_2, F(E_2) = E_2 + E_1$ per qualche numero reale k, dove E_1, E_2, E_3, E_4 è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una matrice di F;

(b) trovare basi per gli autospazi di F;

(c) determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.