UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prova scritta del 15-7-2004 - a.a. 2003-2004

1. (a) Si definiscano rango e determinante di una matrice;

(b) si enunci il risultato che relaziona rango, determinante ed invertibilità di una matrice;

(c) si dimostri tale risultato.

2. Determinare per quali valori $h \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + hX_2 + X_4 = 0 \\ X_1 + X_3 - hX_4 = 1 \\ -X_1 + X_3 - X_4 = h \\ hX_1 + X_2 + X_3 = 1 \end{cases}$$

e calcolarne esplicitamente le soluzioni, utilizzando esclusivamente operazioni elementari.

3. Siano a e b due numeri reali e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & 2 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}.$$

Si determinino i valori di a e b per i quali A è (o no) invertibile e, in tal caso, si calcoli, con sole operazioni elementari, l'inversa.

4. Sia k un numero reale e sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Siano

$$v_1 = e_1 - e_2, v_2 = e_1 + e_2 + e_4, v_3 = e_1 - ke_2, v_4 = ke_2 + 2e_3.$$

(a) Sia $U =< v_1, v_2, v_3, v_4 >$ il sottospazio generato da essi. Si calcoli la dimensione di U;

(b) si determini, se esiste, un sottospazio W non nullo di V tale che

$$U \oplus W = V;$$

(c) siano

$$u_k = ke_1 - e_2, v_k = e_1 + ke_2.$$

Si determinino (se esistono) i valori di k per i quali $dim U \cap < u_k, v_k >= 1$.

5. Sia A uno spazio affine di dimensione n, sia $O, e_1, e_2, \ldots, e_n$, un riferimento affine.

(a) Si definisca la nozione di parallelismo tra due sottospazi affini di A;

(b) sia $n = 3$ e siano r una retta e p un piano in A. Si enunci la proposizione che caratterizza il parallelismo o l'incidenza di r e p in funzione delle loro equazioni;
(c) si dimostri tale proposizione.

6. Sia A uno spazio affine di dimensione 3, sia O, e_1, e_2, e_3, un riferimento affine, sia k un numero reale e si considerino le tre rette di equazioni parametriche/cartesiane seguenti:

$$r_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}; R_k : \begin{cases} x = 1 \\ y - kz = 0 \end{cases}; r_3 : \begin{cases} x = -2u + 1 \\ y = u \\ z = 0 \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

(a) Si determini, se esistono, valori di k per i quali esiste un piano che contiene tutte e tre le rette;
(b) Determinare le equazioni di tutti i piani p tali che $r_1 \subset p, R_k \not\subset p, r_3 \not\subset p$.

7. Siano V e W due spazi vettoriali reali di dimensione finita, $F : V \to W$ un'applicazione lineare fissata.

(a) Si determini, se esiste, un'applicazione lineare $G : V \to W$ tale che $N(F) \cong N(G), N(F) \neq N(G)$;

(b) Si determini, se esiste, un'applicazione lineare $G : V \to W$ tale che $N(F) = N(G), ImF = ImG, G \neq F$;

(c) Si determini, se esiste, un'applicazione lineare $G : V \to W$ tale che $W/ImF \cong N(G)$.

8. Siano $v_1 = (1, 0, 1, 2), v_2 = (1, 1, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che $< v_1, v_2 >\subset N(F), F(E_4) = -E_4, F(E_1) = kE_2 + E_3$ per qualche numero reale k, dove E_1, E_2, E_3, E_4 è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una matrice di F;

(b) trovare basi per gli autospazi di F;

(c) determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.