

Tutorato VIII

24/11/2003

Continuità in \mathbb{R}^2

Esercizio 1. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\pi+2 \arctan(y/x)} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{y^2}{2\pi} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(i) Mostrare che $f(x, y)$ è continua per $x \neq 0$.

(ii) Mostrare che per ogni θ

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = 0.$$

(iii) La funzione $f(x, y)$ è continua nell'origine?

Esercizio 2. Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Dato $\epsilon > 0$ trovare $\delta : |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$ per ogni $|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$ nei seguenti casi:

(i) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\alpha/2}$, $\alpha > 0$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

(ii) $f(x, y) = \sin \frac{1}{xy^2}$, $(x_0, y_0) = (-1, -1)$.

(iii) $f(x, y) = \log(\cos xy)$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Esercizio 3. Trovare della condizioni su α , e β , affinché la funzione f sia continua in \mathbb{R}^2 :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{(x^2+y^2)^{\beta/2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Esercizio 4. Dire se la seguente funzione è continua in \mathbb{R}^2 :

$$f(x, y) = \begin{cases} ye^{-\left(\frac{y}{x-1}\right)^2} & \text{se } x \neq 1, \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$