AL1 - Algebra 1: fondamenti - A.A. 2003/2004

APPELLO A - I Parte

Matricola (O ALTRO IDENTIFICATIVO) $\rightarrow$ [   ]

Cognome: .... **Nome:** ....

---

esercizio	1		2	3			4	5	
punti max	3	10	5	4	6	3	6	5	8
punti assegnati									
totale									

AVVERTENZE : *Svolgere gli esercizi in modo conciso, ma esauriente, nello spazio assegnato. Fino a* **2** punti ulteriori *potranno essere assegnati agli elaborati scritti in modo molto chiaro.*

ESERCIZIO I-1. Sia $\mathbf{2} := \{0, 1\}$ l'insieme composto da due elementi e sia X un qualunque insieme. Se $Y \subseteq X$, allora si definisce *la funzione caratteristica di* Y *in* X, $\boldsymbol{\chi}_{_Y} : X \to \mathbf{2}$, ponendo:

$$\boldsymbol{\chi}_{_Y}(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in Y\,; \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus Y\,. \end{cases}$$

(1) Sia $A := \{2, 4, 7, 8\}$, $B := \{3, 6, 8\}$, $X := A \times B$ e sia $Y := \{(a, b) \in X \mid \mathrm{mcm}(a, b) = ab\}$. Descrivere esplicitamente la funzione caratteristica di Y $\boldsymbol{\chi}_{_Y} : X \to \mathbf{2}$.

(2) Dimostrare che l'insieme:

$$\mathbf{2}^X := \{f : X \to \mathbf{2} \mid f \text{ è un'applicazione tra insiemi}\}$$

e l'insieme delle parti dell'insieme X:

$$\boldsymbol{P}(X) := \{Y \mid Y \subseteq X\}$$

sono in corrispondenza biunivoca. [Dimostrare questo enunciato almeno nel caso in cui X sia un insieme finito con n elementi (con $n \geq 0$), cioè dimostrare che, in tal caso, $\boldsymbol{P}(X)$ ha esattamente 2^n elementi.]

ESERCIZIO I-2. Utilizzando il Principio di Induzione, provare che, per ogni $n \geq 3$, la seguente espressione:

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \ldots + 2 \cdot (n-1) + 2 \cdot n$$

è uguale ad una soltanto tra le seguenti:

(a) $3(n-1)$;
(b) $\frac{n(n+1)}{2}$;
(c) $n(n+1) - 6$;
(d) $n(n-1)$.

ESERCIZIO I-3. (1) Sia dato un intero

$$a := a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

scritto in forma decimale (con $0 \leq a_i \leq 9$). Poniamo

$$\boldsymbol{S}(a) := a_m + a_{m-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0\,.$$

(1) Dimostrare che $\quad 9 \mid a \quad \Leftrightarrow \quad 9 \mid \boldsymbol{S}(a)$;
(2) Se $a, b, c \in \mathbb{N}$, allora mostrare che $\quad ab = c \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S}(a)\boldsymbol{S}(b) \equiv \boldsymbol{S}(c) \pmod 9$

[“Prova del nove”];
(3) Dare un esempio per mostrare che l'implicazione in **(2)** non si inverte.

ESERCIZIO I-4. Sia data la relazione ρ definita sull'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali nella maniera seguente:

$$a\rho b \quad :\Leftrightarrow \quad ab \text{ è il quadrato di un numero intero}\,.$$

Stabilire se tale relazione verifica la proprietà riflessiva **(R)**, la proprietà simmetrica **(S)**, la proprietà antisimmetrica **(AS)**, la proprietà transitiva **(T)**, la proprietà totale **(TT)**.

ESERCIZIO I-5. **(1)** Negare le seguenti proposizioni:
(a) Se ci sarà un temporale, allora ci saranno delle inondazioni.
(b) Domani sarà freddo o pioverà.
(2) Date le proposizioni $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, scrivere la tabella di verità della proposizione:

$$\neg \boldsymbol{P} \wedge (\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R})\,.$$

AL1 - Algebra 1: fondamenti - A.A. 2003/2004

APPELLO A - II Parte

Matricola (O ALTRO IDENTIFICATIVO) $\rightarrow$ [   ]

Cognome: .... **Nome:** ....

---

esercizio	1	2		3		4		5	
punti max	8	5	5	5	6	5	5	5	4
punti assegnati									
totale									

AVVERTENZE : *Svolgere gli esercizi in modo conciso, ma esauriente, nello spazio assegnato. Fino a* **2** punti ulteriori *potranno essere assegnati agli elaborati scritti in modo molto chiaro.*

ESERCIZIO II-1. Determinare (mod 385) tutte le eventuali soluzioni del sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 2X \equiv 6 \pmod{22} \\ 9X \equiv 3 \pmod{15} \\ 8X \equiv 2 \pmod{14} \ . \end{cases}$$

ESERCIZIO II-2. Sia $(G, \ \cdot)$ un gruppo moltiplicativo.

(1) Sia H un sottoinsieme non vuoto di G. Dimostrare che $(H, \ \cdot)$ è un sottogruppo di $(G, \ \cdot)$ se e soltanto se $H \cdot H^{-1} \subseteq H$ (dove $H^{-1} := \{h^{-1} \mid h \in H\}$).

(2) Mostrare che se $(H, \ \cdot)$ è un sottogruppo di $(G, \ \cdot)$ allora $H = H^{-1}$. Dare un esempio per mostrare che il viceversa non è vero (cioè, dare un esempio di un sottoinsieme non vuoto H di G tale che $H = H^{-1}$, con $(H, \ \cdot)$ non sottogruppo di $(G, \ \cdot)$.

ESERCIZIO II-3. Sia G l'insieme delle matrici del tipo seguente:

$$\begin{pmatrix} 1+n & n \\ -n & 1-n \end{pmatrix} , \qquad \text{con } n \in \mathbb{Z} \, .$$

(1) Mostrare che $(G, \cdot \,)$ è un sottogruppo del gruppo moltiplicativo di matrici $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) := \{A \in \boldsymbol{M}_{2,2}(\mathbb{Z}) \mid \det(A) = 1\}$.

(2) Stabilire se esiste un isomorfismo tra $(\mathbb{Z}, +)$ e $(G, \cdot \,)$.

ESERCIZIO II-4. Sia $A := \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ l'anello prodotto diretto degli anelli $(\mathbb{Q}, +, \cdot \,)$ e $(\mathbb{Z}, +, \cdot \,)$.

(1) Stabilire se $(A, +, \cdot \,)$ è un anello unitario, se è commutativo, se possiede divisori dello zero, se è un campo.

(2) Sia $B := \{(x, 2y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \, (\subseteq A)$. Stabilire se B è un sottoanello di $(A, +, \cdot \,)$, o/e se B è un ideale di $(A, +, \cdot \,)$.

ESERCIZIO II-5. Siano dati i seguenti due polinomi $f(T) := -6 + 3T - 2T^4 + T^5$ e $g(T) := -2 - T + T^2 - 2T^3 + T^4$. Si considerino $f(T)$, $g(T)$ come polinomi dell'anello dei polinomi $\mathbb{Q}[T]$, utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive in $\mathbb{Q}[T]$:

(1) determinare il polinomio monico $d(T) := \mathrm{MCD}(f(T), g(T)) \in \mathbb{Q}[T]$;

(2) determinare due polinomi $a(T), b(T) \in \mathbb{Q}[T]$ in modo tale che:

$$d(T) = a(T)f(T) + b(T)g(T) \quad \text{[identità di Bézout in } \mathbb{Q}[T]\,\text{]}.$$

SOLUZIONI

ESERCIZIO I-1. (1) Si osservi che:

$$\mathrm{MCD}(a,b)=1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{mcm}(a,b)=ab\,,$$

pertanto $Y=\{(2,3),(4,3),(7,3),(7,6),(7,8),(8,3)\}$. Dunque $\boldsymbol{\chi}_Y : X \to \mathbf{2}$ vale 1 su tali elementi e vale 0 sugli altri elementi del prodotto cartesiano $A \times B$.

(2) Esercizio di tipo "teorico", completamente svolto nel libro consigliato [FG].

ESERCIZIO I-2. La risposta esatta è la (c): le altre uguaglianze sono false ad esempio per $n=4$.

Passo induttivo: $[2\cdot 3+2\cdot 4+\ldots+2\cdot(n-1)+2\cdot n]+2\cdot(n+1)=[n(n+1)-6]+2\cdot(n+1)=(n+1)(n+2)-6$.

ESERCIZIO I-3. (1) Esercizio di tipo "teorico", completamente svolto nel libro consigliato [FG].

(2) segue da (1), perché

$$ab=c \quad \Rightarrow \quad ab\equiv c\,(\mathrm{mod}\ 9) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S}(a)\boldsymbol{S}(b)\equiv \boldsymbol{S}(c)\,(\mathrm{mod}\ 9)\,,$$

dove si noti che $\boldsymbol{S}(ab)\equiv \boldsymbol{S}(a)\boldsymbol{S}(b)\,(\mathrm{mod}\ 9)$.

(3) Si prenda ad esempio $a=10$, $b=11$ e $c=101$, allora $ab\neq c$, però $\boldsymbol{S}(a)=1$, $\boldsymbol{S}(b)=2$, $\boldsymbol{S}(c)=2=\boldsymbol{S}(a)\boldsymbol{S}(b)$.

ESERCIZIO I-4. La relazione ρ, verifica **(R)**, **(S)** e **(T)** [se $ab=x^2$ e $bc=y^2$ allora $ab^2c=(xy)^2$, dunque $ac=\frac{(xy)^2}{b^2}$; si noti che $b \mid xy$ e quindi $\frac{xy}{b}$ è un numero naturale], ma non **(AS)**, né **(TT)**.

ESERCIZIO I-5. (1a) $\boldsymbol{P}\Rightarrow\boldsymbol{Q}$ è equivalente a $\neg\boldsymbol{P}\vee\boldsymbol{Q}$ e $\neg(\neg\boldsymbol{P}\vee\boldsymbol{Q})$ è equivalente a $\boldsymbol{P}\wedge\neg\boldsymbol{Q}$. Dunque la negazione di (a) è "Ci sarà un temporale e non ci saranno delle inondazioni".

(1b) "Domani non sarà freddo e non pioverà".

La tabella della verità è la seguente:

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{R}$	$\neg\boldsymbol{P}$	$(\boldsymbol{Q}\vee\boldsymbol{R})$	$\neg\boldsymbol{P}\wedge(\boldsymbol{Q}\vee\boldsymbol{R})$
v	v	v	f	v	f
v	v	f	f	v	f
v	f	v	f	v	f
v	f	f	f	f	f
f	v	v	v	v	v
f	v	f	v	v	v
f	f	v	v	v	v
f	f	f	v	f	f

ESERCIZIO II-1. La soluzione del sistema è data da $x \equiv 212 \pmod{385}$.

ESERCIZIO II-2. Esercizio di tipo "teorico", completamente svolto nel libro consigliato [FG]. Per un controesempio, basta prendere (nel caso in cui G sia un qualsiasi gruppo non banale) $H := G \setminus \{1\}$.

ESERCIZIO II-3. **(1)** Si noti che l'elemento neutro di $(G, \cdot)$ si ottiene prendendo $n = 0$ e che:

$$\begin{pmatrix} 1+n & n \\ -n & 1-n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1-n & -n \\ n & 1+n \end{pmatrix}.$$

Gli ulteriori dettagli della dimostrazione sono semplici.

(2) Si vede facilmente che l'applicazione $\mathbb{Z} \to G,\ n \mapsto \begin{pmatrix} 1+n & n \\ -n & 1-n \end{pmatrix}$ stabilisce un isomorfismo di gruppi.

ESERCIZIO II-4. **(1)**

$(A, +, \cdot\,)$ è un anello unitario, con unità uguale a $(1, 1)$.

$(A, +, \cdot\,)$ è un anello commutativo, perché $(\mathbb{Q}, +, \cdot\,)$ e $(\mathbb{Z}, +, \cdot\,)$ sono anelli commutativi e l'operazione viene effettuata componente per componente.

$(A, +, \cdot\,)$ possiede divisori dello zero:

$$(x, 0) \cdot (0, n) = (0, 0)\,, \quad \forall x \in \mathbb{Q}\,; \forall n \in \mathbb{Z}\,,$$

$(A, +, \cdot\,)$ non può essere un campo, dal momento che possiede divisori dello zero [ad esempio, un elemento del tipo $(0, n)$ $(\neq (0, 0)) \in A$ non possiede un inverso in A].

(2) B è un sottoanello di A (la verifica è semplice), ma non è un ideale, perché ad esempio: $(1, 2) \cdot (1/3, 1) \notin B$ (con $(1, 2) \in B$ e $(1/3, 1) \in A$).

ESERCIZIO II-5. **(1)** $f = g \cdot T + (-6 + 5T + T^2 - T^3)$

$g = (-6 + 5T + T^2 - T^3)(1 - T) + (4 - 12T + 5T^2)$

$(-6 + 5T + T^2 - T^3) = (4 - 12T + 5T^2)(-\frac{1}{25}7 - \frac{1}{5}T) + \frac{1}{25}(-122 + 61T)$

$(4 - 12T + 5T^2) = \frac{1}{25}(-122 + 61T)\frac{1}{61}(-50 + 125T) + 0$

$\mathrm{MCD}(f, g) = -2 + T$ (polinomio monico). Si calcola poi facilmente che:

$$a(T) = \frac{1}{61}(18 + 2T + 5T^2)\,, \quad b(T) = \frac{1}{61}(7 - 13T - 2T^2 - 5T^3)\,.$$