**AL1 - Algebra 1: fondamenti - A.A. 2003/2004**

**Valutazione "in itinere" - I Prova**

---

**Matricola (O ALTRO IDENTIFICATIVO)** $\rightarrow$ [ ]

**Cognome:** .................................... **Nome:** ....................................

---

| esercizio | 1 | 2 | 3 | 4.1 | 4.2 | 5.1 | 5.2 | 5.3 | 6.1 | 6.2 | 7 | 8.1 | 8.2 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| punti max | 4 | 2 | 4 | 3 | 2 | 2 | 4 | 4 | 3 | 2 | 4 | 3 | 2 | 4 |
| punti assegnati | | | | | | | | | | | | | | |
| totale | | | | | | | | | | | | | | |

**AVVERTENZE :** *Svolgere gli esercizi in modo conciso, ma esauriente, nello spazio assegnato. Fino a* **due punti ulteriori** *potranno essere assegnati agli elaborati scritti in modo molto chiaro.*

**ESERCIZIO 1.** Dati comunque tre insiemi $X$, $Y$ e $Z$. Dimostrare che vale soltanto una delle seguenti uguaglianze:
**(i)** $(X \smallsetminus Y) \smallsetminus Z = X \smallsetminus (Y \cup Z)$;
**(ii)** $(X \smallsetminus Y) \smallsetminus Z = X \smallsetminus (Y \cap Z)$;
**(iii)** $(X \smallsetminus Y) \smallsetminus Z = Z \smallsetminus (Y \smallsetminus X)$.

**ESERCIZIO 2.** Scrivere in base 5 il numero 1930 (spiegando brevemente il procedimento seguito).

**ESERCIZIO 3.** Siano dati i seguenti insiemi

$$X := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 11, 12\} \quad \text{e} \quad Y := \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$

Elencare le coppie ordinate che appartengono al grafico della corrispondenza da $X$ ad $Y$ definita da " $x = |3y - 2|$ " (con $x \in X$ , $y \in Y$).
Descrivere, tramite il grafico, la corrispondenza inversa (da $Y$ ad $X$) della corrispondenza sopra data.

**ESERCIZIO 4.** Siano dati i numeri complessi

$$u =: 4(1 + 2\sqrt{3}) + 4(2 - \sqrt{3})i \quad \text{e} \quad v := 1 + 2i.$$

**(1)** Determinare il numero complesso $z := x + iy$ in modo tale che $u = vz$.
**(2)** Scrivere $z$ in forma polare (o trigonometrica), cioè determinare $|z| \in \mathbb{R}$ e $\theta := \mathrm{Arg}(z)$, con $0 \leq \theta \lneq 2\pi$, in modo tale che $z = |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$.

**ESERCIZIO 5. (1)** Enunciare una proposizione equivalente alla negazione della seguente proposizione:
*Il Ministro del Tesoro afferma che non metterà le mani nelle tasche dei contribuenti e non diminuirà il fondo di finanziamento delle università.*

[**Non** è accettabile la risposta: *"Il Ministro del Tesoro non afferma che ...* " oppure *"Il Ministro del Tesoro nega che ...* " ]

**(2)** Utilizzando l'equivalenza logica " $\neg(\neg \boldsymbol{P}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}$ " semplificare la seguente frase:
*Non ha torto chi afferma che non è vero che non sia credibile che Homer ignori in quale Stato sia Springfield.*

**(3) (a)** Utilizzando le tabelle della verità, dimostrare l'equivalenza logica tra " $\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$ " e " $(\neg \boldsymbol{P}) \vee \boldsymbol{Q}$ ".

**(b)** Enunciare una proposizione equivalente alla negazione della seguente proposizione:
*Se il processo non viene sospeso allora l'imputato viene condannato.*

**ESERCIZIO 6.** Nell'insieme prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, si definisca la seguente relazione:

$$(x,y)\boldsymbol{\rho}(x',y') :\Leftrightarrow \quad xy = x'y' , \qquad \text{dove } (x,y),(x',y') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} .$$

**(1)** Mostrare quali tra le seguenti proprietà sono soddisfatte dalla relazione $\boldsymbol{\rho}$: **(R)** proprietà riflessiva; **(S)** proprietà simmetrica; **(AS)** proprietà antisimmetrica; **(T)** proprietà transitiva; **(TT)** proprietà totale.

**(2)** Descrivere esplicitamente l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x,y)\boldsymbol{\rho}(4,6)\}$.

**ESERCIZIO 7.** Nel ridente paese di *Videoetcircenses* tutti i **1313** abitanti sono appassionati di televisione e seguono con regolarità almeno una delle seguenti trasmissioni:

**(TVa)** *Ficco il naso nei fatti tuoi;*
**(TVb)** *La penisola dei curiosi;*
**(TVc)** *Chi vuol esser proletario?*

Sapendo che tra i **1250** abitanti che seguono **(TVa)** ve ne sono **650** che seguono anche **(TVb)**; tra i **955** abitanti che seguono **(TVc)** ve ne sono **915** che seguono anche **(TVa)**; tra i **1299** abitanti che seguono **(TVb)** ve ne sono **627** che seguono anche **(TVc)**; quanti sono gli abitanti di *Videoetcircenses* che seguono **(TVa)**, **(TVb)** e **(TVc)** ?

**ESERCIZIO 8.** Dati $a := 2261$, $b := 1092$, utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive

**(1)** determinare $d := \mathrm{MCD}(a,b)$ $(\in \mathbb{N})$ e da questo dedurre il $\mathrm{mcm}(a,b)$ $(\in \mathbb{N})$;

**(2)** determinare un'espressione del tipo $d = ax + by$ (cioè determinare $x, y \in \mathbb{Z}$) [identità di Bézout].

**ESERCIZIO 9.** Dimostrare per induzione su $n \geq 2$ che vale una soltanto tra le seguenti identità:

**(i)** $3 + 5 + \ldots + (2n-1) = 3(n-1)$;
**(ii)** $3 + 5 + \ldots + (2n-1) = 3 + 5(n-2)$;
**(iii)** $3 + 5 + \ldots + (2n-1) = (n+1)(n-1)$.

## SOLUZIONI

**NOTA: per alcuni esercizi, vengono date tra parentesi [ ] in modo schematico le variazioni numeriche ed i risultati.**

**Esercizio 1.** La risposta esatta è la (i):

$$\begin{aligned} a \in (X \smallsetminus Y) \smallsetminus Z \quad & \Leftrightarrow \ (a \in (X \smallsetminus Y)) \wedge (a \notin Z) \ \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \ ((a \in X) \wedge (a \notin Y)) \wedge (a \notin Z) \ \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \ (a \in X) \wedge (a \notin Y \cup Z) \ \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \ a \in X \smallsetminus (Y \cup Z)\,. \end{aligned}$$

Le altre uguaglianze non valgono in generale. Ad esempio, se $X := \{a, b, c\}$, $Y := \{b\}$ e $Z := \{c\}$. Allora:

$$(X \smallsetminus Y) \smallsetminus Z = \{a\}\,, \quad X \smallsetminus (Y \cap Z) = X\,, \quad Z \smallsetminus (Y \smallsetminus X) = Z \smallsetminus \emptyset = Z\,.$$

**Esercizio 2.** $1930 = 3 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 = (30210)_5$.

[VARIAZIONI: $571 = (20323)_4$, $2662 = (10522)_7$, $4864 = (34304)_6$.]

**Esercizio 3.** Il grafico $G \subseteq X \times Y$ della corrispondenza data è il seguente:

$$G = \{(11, -3), (8, -2), (5, -1), (2, 0), (1, 1), (4, 2)\}\,.$$

Il grafico della corrispondenza inversa da $Y$ ad $X$ è il seguente:

$$G^{-1} = \{(-3, 11), (-2, 8), (-1, 5), (0, 2), (1, 1), (2, 4)\}\,.$$

**Esercizio 4. (1)**

$$\begin{aligned} z = u \cdot v^{-1} \quad & = \frac{u \cdot \overline{v}}{\mathbf{N}(v)} = \\ & = \frac{[4(1+2\sqrt{3})+4(2-\sqrt{3})i](1-2i)}{5} = 4(1-\sqrt{3})i \end{aligned}$$

**(2)** $z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = 8\left(\cos(\frac{-\pi}{3}) + i \sin(\frac{-\pi}{3})\right) = 8\left(\cos(\frac{5\pi}{3}) + i \sin(\frac{5\pi}{3})\right)$.

[VARIAZIONI:
$(4-2\sqrt{3}) + i(2+4\sqrt{3})$; $2+i$; $2+2\sqrt{3}i$; $4$; $\frac{\pi}{3}$ ;
$(3-6\sqrt{3}) + i(6+3\sqrt{3})$; $2-i$; $-3\sqrt{3}+3i$; $6$; $\frac{5\pi}{6}$ ;
$(8-4\sqrt{3}) + i(4+8\sqrt{3})$; $2+i$; $4+4\sqrt{3}i$; $8$; $\frac{\pi}{3}$ .]

**Esercizio 5. (1)** Applicare l'equivalenza logica: $\neg(\neg P \wedge \neg Q) \ \Leftrightarrow \ P \vee Q$ .
*Il Ministro del Tesoro afferma che metterà le mani nelle tasche dei contribuenti o diminuirà il fondo di finanziamento delle università.*

(2) *Ha ragione chi afferma che (è vero che) sia credibile che Homer ignori in quale Stato sia Springfield.*

(3a) La tabella della verità è la seguente:

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ | $\neg P \vee Q$ |
|---|---|---|---|
| v | v | v | v |
| v | f | f | f |
| f | v | v | v |
| f | f | v | v |

(3b) Da (3a) segue che $\neg(P \Rightarrow Q)$ è logicamente equivalente a $P \wedge \neg Q$.
Pertanto, la risposta esatta è la seguente :
*Il processo non viene sospeso e l'imputato non viene condannato.*

**Esercizio 6.** **(1)** La relazione $\boldsymbol{\rho}$ è **(R)** **(S)** e **(T)** cioè è una relazione di equivalenza su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Si noti che la relazione $\boldsymbol{\rho}$ non è **(AS)** né **(TT)**.
$\neg$**(AS)** ad esempio: $(2,4)\boldsymbol{\rho}(4,2)$ e $(4,2)\boldsymbol{\rho}(2,4)$, però ovviamente $(2,4) \neq (4,2)$;
$\neg$**(TT)** ad esempio: $(0,1) \not\boldsymbol{\rho}(1,2) \ \wedge \ (1,2) \not\boldsymbol{\rho}(0,1)$.

**(2)** $(1,24),(2,12),(3,8),(4,6),(24,1),(12,2),(8,3),(6,4)$.

**Esercizio 7.** Sia $A$ l'insieme degli abitanti che seguono con regolarità **(TVa)**.
Sia $B$ l'insieme degli abitanti che seguono con regolarità **(TVb)**.
Sia $C$ l'insieme degli abitanti che seguono con regolarità **(TVc)**.
Per ipotesi $\mathrm{Card}(A \cup B \cup C) = 1313$.
La conclusione segue applicando la seguente formula:
$\mathrm{Card}(A{\cap}B{\cap}C)$= $\mathrm{Card}(A{\cup}B{\cup}C)$ - [$\mathrm{Card}(A)$ + $\mathrm{Card}(B)$ + $\mathrm{Card}(C)$] + $\mathrm{Card}(A{\cap}B$ + $\mathrm{Card}(A \cap C)$+ $\mathrm{Card}(B \cap C)$= $1313 - [1250 + 1299 + 955] + 650 + 915 + 627 = 1313 - 3504 + 2192 = 3505 - 3504 = 1$.

[VARIAZIONI:
$652, 912, 629 \ \to \ 2$ ,
$640, 920, 634 \ \to \ 3$ ,
$700, 899, 596 \ \to \ 4$ .]

**Esercizio 8.** **(1)**

$$\begin{aligned} 2261 &= 1092 \cdot 2 + 77 \\ 1092 &= 77 \cdot 14 + 14 \\ 77 &= 14 \cdot 5 + 7 \\ 14 &= 7 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

quindi $\mathrm{MCD}(2261,\, 1092) = 7$ e $\mathrm{mcm}(2261,\, 1092) = \frac{2261 \cdot 1092}{7} = 352716$.

**(2)** $7 = 2261 \cdot 71 + 1092 \cdot (-147)$.

[VARIAZIONI:
$2519, 1177$; $11$; $269533$; $50, -107$;
$3195, 2997$; $9$; $1063935$; $106, -113$;
$2585, 2160$; $5$; $1116720$; $61, -73$.]

**Esercizio 9.** **(i)** falsa ad esempio per $n = 3$: $3 + 5 \neq 3 \cdot 2$.

**(ii)** falsa ad esempio per $n = 4$: $3 + 5 + 7 \neq 3 + 5 \cdot 2$.

**(iii)** vera. Si dimostra per induzione su $n \geq 2$.

**Base dell'induzione:** se $n = 2$, è banalmente vero che $3 = (2+1)(2-1)$.

**Passo Induttivo.** *Ipotesi induttiva:* supponiamo vero che per un dato $k \geq 1$ si abbia:

$$3 + 5 + \ldots + (2k-1) = (k+1)(k-1)\,.$$

*Tesi:* Mostriamo che:

$$3 + 5 + \ldots + (2(k+1)-1) = (k+2)k\,.$$

Ebbene,

$$\begin{aligned} 3 + 5 + \ldots + (2(k+1)-1) &= 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + (2k+1) = \\ &= (k+1)(k-1) + (2k+1) = \\ &= k^2 - 1 + 2k + 1 = k^2 + 2k = k(k+2)\,. \end{aligned}$$