AL1 - Algebra 1: fondamenti - A.A. 2003/2004

Appello X, Settembre 2004

Matricola (O ALTRO IDENTIFICATIVO) → [ ]

Cognome: .... **Nome:** ....

---

esercizio	1	2	3	4	5	6	7
punti max	3	5	(3, 5)	5	(5, 3)	(4, 4)	(2, 5, 5)
punti assegnati							
totale							

AVVERTENZE : *Svolgere gli esercizi in modo conciso, ma esauriente, nello spazio assegnato. Fino a* **2** punti ulteriori *potranno essere assegnati agli elaborati scritti in modo molto chiaro.*

ESERCIZIO 1. Dimostrare che se X è un insieme finito con n elementi, $n \geq 0$, allora l'insieme delle parti dell'insieme X, $\boldsymbol{P}(X)$, ha esattamente 2^n elementi.

ESERCIZIO 2. Sia dato un intero naturale

$$a := a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

scritto in forma decimale (con $0 \leq a_i \leq 9$). Dimostrare che:

$$3 \mid a \quad \Leftrightarrow \quad 3 \mid (a_m + a_{m-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0)\,.$$

ESERCIZIO 3. Sia G l'insieme delle matrici del tipo seguente:

$$\begin{pmatrix} 1-a & -a \\ a & 1+a \end{pmatrix}, \qquad \text{con } a \in \mathbb{Z}\,.$$

(1) Mostrare che $(G, \cdot\,)$ è un sottogruppo del gruppo moltiplicativo di matrici $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) := \{A \in \boldsymbol{M}_{2,2}(\mathbb{Z}) \mid \det(A) = 1\}$.

(2) Stabilire se l'applicazione da $(\mathbb{Z}, +)$ a $(G, \cdot\,)$ definita da

$$a \mapsto \begin{pmatrix} 1-a & -a \\ a & 1+a \end{pmatrix}$$

definisce un isomorfismo tra gruppi.

ESERCIZIO 4. Determinare (mod 385) tutte le eventuali soluzioni del sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 2X \equiv 4 & (\text{mod } 22) \\ 3X \equiv 3 & (\text{mod } 15) \\ 2X \equiv 6 & (\text{mod } 14)\,. \end{cases}$$

ESERCIZIO 5. Siano dati i seguenti due polinomi $f(T) := -18 - 3T + 4T^2 + T^3$ e $g(T) := -2 - T + T^2$.
Si considerino $f(T)$, $g(T)$ come polinomi dell'anello dei polinomi $\mathbb{Q}[T]$, utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive in $\mathbb{Q}[T]$:

(1) determinare il polinomio monico $d(T) := \mathrm{MCD}(f(T), g(T)) \in \mathbb{Q}[T]$;

(2) determinare un'espressione del tipo $d(T) = a(T)f(T) + b(T)g(T)$ (cioè determinare due polinomi $a(T), b(T) \in \mathbb{Q}[T]$) [identità di Bézout in $\mathbb{Q}[T]$].

ESERCIZIO 6. Nell'insieme dei numeri complessi non nulli $X := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ si definisca la seguente relazione:

$$\begin{aligned} z \ \boldsymbol{\rho} \ z' :\Leftrightarrow\ & (z \cdot \overline{z})(z' + \overline{z'}) = (z' \cdot \overline{z'})(z + \overline{z})\,, \quad z, z' \in X \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{N}(z)\mathrm{Tr}(z') = \mathrm{N}(z')\mathrm{Tr}(z)\,, \quad z, z' \in X\,. \end{aligned}$$

(1) Mostrare quali tra le seguenti proprietà sono soddisfatte dalla relazione $\boldsymbol{\rho}$: **(R)** proprietà riflessiva; **(S)** proprietà simmetrica; **(AS)** proprietà antisimmetrica; **(T)** proprietà transitiva; **(TT)** proprietà totale.

(2) Descrivere esplicitamente l'insieme $\{z \in X \mid z \ \boldsymbol{\rho}\ 2\}$.

ESERCIZIO 7. **(1)** Dare esplicitamente la definizione di ideale I in un anello commutativo $(A, +, \cdot)$.

(2) Dimostrare che ogni ideale I nell'anello degli interi $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è principale.

(3) Dati due ideali I e J in un anello commutativo arbitrario $(A, +, \cdot)$.
Stabilire se i seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} S &:= \{i + j \mid i \in I\,,\ j \in J\}\,, \\ P &:= \{i \cdot j \mid i \in I\,,\ j \in J\}\,, \end{aligned}$$

sono, oppure non sono, ideali di $(A, +, \cdot)$.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1. Esercizio di tipo "teorico", completamente svolto nel libro consigliato [FG].

ESERCIZIO 2. Esercizio di tipo "teorico", completamente svolto nel libro consigliato [FG].

ESERCIZIO 3. **(1)** Si noti che l'elemento neutro di $(G, \cdot)$ si ottiene prendendo $a = 0$ e che:
$$\begin{pmatrix} 1-a & -a \\ a & 1+a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1+a & a \\ -a & 1-a \end{pmatrix}.$$
Gli ulteriori dettagli della dimostrazione sono semplici.

(2) La risposta è affermativa e la verifica è immediata.

ESERCIZIO 4. La soluzione del sistema è data da $x \equiv 101 \pmod{385}$.

ESERCIZIO 5. **(1)** Il polinomio *monico* $d(T) = \mathrm{MCD}(f(T), g(T)) = -2 + T$.

(2) Si noti che $\frac{1}{4}f(T) - \frac{1}{4}q(T)g(T) = d(T) = \frac{1}{4}r(T)$, dove $q(T) := 5 + T$, $r(T) := -8 + 4T$. Quindi:
$$a(T) := \frac{1}{4}\,; \quad b(T) := -\frac{1}{4}q(T)\,.$$

ESERCIZIO 6. **(1)** Si noti che:
$$z \;\boldsymbol{\rho}\; z' \Leftrightarrow \frac{\mathrm{Tr}(z)}{\mathrm{N}(z)} = \frac{\mathrm{Tr}(z')}{\mathrm{N}(z')}$$
Dunque è subito visto che ρ è una relazione di equivalenza, che non è antisimmetrica ($z \;\boldsymbol{\rho}\; \overline{z}$ e $\overline{z} \;\boldsymbol{\rho}\; z$) né totale (ad esempio 2 e 3 non sono in relazione ρ).

(2) $\{z \in X \mid z \;\boldsymbol{\rho}\; 2\}$ è la circonferenza di centro $(1,\ 0)$ e raggio 1 nel piano complesso di Argand-Gauss, circonferenza privata del punto (0,0) per la definizione di X.

ESERCIZIO 7. **(1), (2)** Esercizio di tipo "teorico", completamente svolto negli appunti e nei volumi consigliati.

(3) S è un ideale, ma P non è in generale un ideale (perché non è neanche un sottoanello).