Rappresentazione conforme

Anna Scaramuzza

26/04/2004

Consideriamo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

Il sistema definisce una **trasformazione o rappresentazione** tra i punti del piano uv e xy. Le equazioni sono dette equazioni della trasformazione e se ad ogni punto del piano xy corrisponde uno ed un sol punto del piano uv e viceversa la trasformazione è detta biunivoca.
Con la trasformazione (1) una regione chiusa $\mathcal{R}$ del piano xy è rappresentata nel piano uv da una regione chiusa $\mathcal{R}'$. Se si indica con A_{xy} e con A_{uv} le aree delle due regioni si dimostra che

$$\lim_{A_{xy}\to 0} \frac{A_{uv}}{A_{xy}} = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|$$

e dove $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ è detto lo jacobiano della trasformazione (1).

FUNZIONI COMPLESSE DI RAPPRESENTAZIONE

Un caso particolare di rappresentazione si ha quando u e v sono la parte reale e immaginaria di una funzione analitica in una variabile complessa $z = x + iy$, cioé $w = u + iv = f(z) = f(x + iy)$.
In tal caso lo jacobiano della trasformazione è dato da:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = |f(z)|^2$$

Infatti, se $f(z)$ è analitica in una regione $\mathcal{R}$ allora in tale regione $f(z)$ verifica le condizioni di Cauchy - Riemann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

per cui lo jacobiano è:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \\
&= \left|\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 \\
&= \left|f'(z)\right|^2
\end{aligned}
$$

Ne segue che la trasformazione è biunivoca nelle regioni dove $f'(z) \neq 0$ e i punti in cui $f'(z) = 0$ sono detti punti critici.

RAPPRESENTAZIONE CONFORME

Sia data una trasformazione del tipo (1) e supponiamo che il punto (x_0, y_0) del piano xy venga trasformato nel punto (u_0, v_0) del piano uv. Siano C_1, C_2 due curve che si intersecano nel punto (x_0, y_0) e supponiamo che siano rappresentate nel piano uv dalle curve C_1', C_2', le quali si intersecano nel punto (u_0, v_0).
Se la trasformazione è tale che l'angolo formato dalle curve C_1, C_2 in (x_0, y_0) è uguale in ampiezza e verso all'angolo formato in (u_0, v_0) da C_1', C_2' allora si dice che la rappresentazione è una **rappresentazione conforme** in (x_0, y_0).
Una rappresentazione che conserva l'ampiezza degli angoli, ma non necessariamente il verso, è detta **isogonale**.

Teorema 1. Sia $f(z)$ una funzione olomorfa e tale che $f'(z) \neq 0$ in una regione $\mathcal{R}$, allora la rappresentazione $w = f(z)$ è conforme in tutti i punti di $\mathcal{R}$.

Con le trasformazioni conformi, le figure poste in un intorno del punto $z_0 = x_0 + iy_0$ del piano $z = x + iy$ si rappresentano con figure simili nel piano $w = u + iv$ e sono ingrandite o ridotte di un fattore dato approssimativamente da $|f'(z_0)|^2$ che viene detto **fattore di amplificazione superficiale**. Le distanze nel piano $z = x + iy$ in un intorno del punto $z_0 = x_0 + iy_0$ sono ingrandite o ridotte nel piano $w = u + iv$ di un fattore dato approssimativamente da $|f'(z_0)|$ che viene detto **fattore di amplificazione lineare**.

Teorema 2 (Teorema di Riemann sulle rappresentazioni). Sia $C = \partial\mathcal{R}$ una linea chiusa semplice nel piano z e sia C' una circonferenza di raggio 1 che costituisce la frontiera della regione $\mathcal{R}'$ nel piano w. Allora esiste una funzione $w = f(z)$ analitica in $\mathcal{R}$, che rappresenta ogni punto di $\mathcal{R}$ su un punto corrispondente di $\mathcal{R}'$ e ogni punto di C su un punto corrispondente di C' in una corrispondenza biunivoca.

Il Teorema afferma l'esistenza della funzione ma non la determina.

Definizione 1. Se si sovrappongono i piani z e w e si ha la trasformazione $w = f(z)$ allora i punti per i quali vale che $z = f(z)$ sono i **punti fissi o invarianti** della trasformazione.

Esempi 1 (Esempi di trasformazioni).

1. **Traslazione.** $w = z + \beta$

2. **Rotazione.** $w = e^{i\vartheta_0} z$

3. **Omotetia.** $w = az$

4. **Inversione.** $w = 1/z$

5. **Composizione.** La composizione di trasformazioni equivale ad un'unica trasformazione.

6. **Trasformazione Lineare.** $w = \alpha z + \beta$ dove $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

   Proposizione 1. Questa trasformazione si può descrivere in termini di composizione di trasformazioni, e precisamente di una traslazione, una rotazione e una omotetia.

   Dimostrazione. Possiamo scrivere: $w = \xi + \beta$ dove $\xi = \alpha z = ae^{i\vartheta_0} z = e^{i\vartheta_0}\tau$ e $\tau = az$.

7. **Trasformazione Bilineare Fratta.** $w = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc \neq 0$.

   Proposizione 2. Si dimostri che la trasformazione bilineare è combinazione di una traslazione, una rotazione, una omotetia e di una inversione

   Dimostrazione. Consideriamo la trasformazione bilineare fratta:

$$\begin{aligned}
w &= \frac{az+b}{cz+d} \\
&= \frac{a \cdot \left(z + \frac{b}{a}\right)}{c \cdot \left(z + \frac{d}{c}\right)} \\
&= \frac{a}{c} \cdot \frac{z + \frac{d}{c} - \frac{d}{c} + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}} \\
&= \frac{a}{c} \cdot \left(1 - \frac{\frac{bc-da}{ca}}{z + \frac{d}{c}}\right) \\
&= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{a(cz+d)} \\
&= m + \frac{n}{z+k}
\end{aligned}$$

   dove $m = a/c$, $n = (bc - ad)/ca$, $k = d/c$ sono delle costanti. Da questo segue che la trasformazione equivale alle trasformazioni $\zeta = z + k$, $\tau = 1/\zeta$ e $w = m + n\tau$ che sono una traslazione, una inversione e una trasformazione bilineare. Poiché le trasformzioni bilineari sono composizione di una traslazione, una rotazione e una omotetia, abbiamo la tesi.

   Proposizione 3. La trasfomazione bilineare lascia invariata la famiglia $\mathcal{F}$ data da tutti i cerchi e tutte le rette del piano complesso.

Dimostrazione. Poiché una trasformazione bilineare si può descrivere con la composizione di una traslazione, una omotetia, una rotazione e una inversione allora sarà sufficiente verificare $\mathcal{F}$ è invarinte rispetto a queste quattro rappresentazioni.
Da semplici calcoli segue che l'equazione di un cerchio nel piano z si può mettere nella forma:

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0 \tag{2}$$

dove $A, C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$ e $AC < B\bar{B}$. (Se A=0 il cerchio degenera in una retta).

(a) **rotazione e omotetia** in questo caso $w = az$ allora sostituendo $z = w/a$ in (2) otteniamo:

$$Aw\bar{w} + B\bar{a}w + \bar{B}a\bar{w} + Ca\bar{a} = 0$$

che è ancora un cerchio.

(b) **traslazione** in questo caso $w = z + \beta$ allora sostituendo $z = w - \beta$ in (2) otteniamo:

$$Aw\bar{w} + (B - A\bar{\beta})w + (\bar{B} - A\bar{\beta})\bar{w} + (C + A\beta\bar{\beta} - B\beta - \bar{B}\bar{\beta}) = 0$$

che è ancora un cerchio.

(c) **inversione** in questo caso $w = 1/z$ allora sostituendo $z = 1/w$ in (2) otteniamo:

$$Cw\bar{w} + \bar{B}w + B\bar{w} + A = 0$$

che è l'equazione di un cerchio.

Definizione 2. Il rapporto

$$\frac{(z_4 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_4 - z_3)(z_2 - z_1)}$$

è detto **birapporto** di z_1, z_2, z_3, z_4.

Il birapporto tra quattro numeri complessi è invariante rispetto a tali trasformazioni.

8. **Trasformazione di Schwarz-Christoffel.** Consideriamo nel piano w, un poligono di vertici $w_1, \dots, w_n$ e di angoli interni $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ rispettivamente. Supponiamo che i punti $w_1, \dots, w_n$ siano rappresentati rispettivamente nei punti $x_1, \dots, x_n$ dell'asse reale del piano z. La trasformazione che rappresenta i punti della regione $\mathcal{R}$ delimitata dal poligono del piano w sulla metà superiore $\mathcal{R}'$ del piano z e il contorno del poligono sull'asse reale è data da:

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dz} &= A(z - x_1)^{\alpha_1/\pi - 1}(z - x_2)^{\alpha_2/\pi - 1} \dots (z - x_n)^{\alpha_n/\pi - 1} \\ w &= A \int (z - x_1)^{\alpha_1/\pi - 1}(z - x_2)^{\alpha_2/\pi - 1} \dots (z - x_n)^{\alpha_n/\pi - 1} dz + B\end{aligned}$$

dove A e B sono due costanti complesse.

Osservazione 1. (a) Tre dei punti $x_1, \ldots, x_n$ si possono fissare arbitrariamente,

(b) le costanti A e B determinano l'orientazione, la dimensione e la posizione del poligono,

(c) conviene fissare un punto all'infinito,

(d) i poligoni illimitati aperti si possono considerare casi limiti di poligoni chiusi.

9. **Trasformazione delle frontiere in forma parametrica.** Sia C una curva del piano z non necessariamente chiusa di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = F(t) \\ y = G(t) \end{cases} \tag{3}$$

dove F e G sono infinitamente derivabili. Allora la trasformazione

$$z = F(w) + iG(w)$$

rappresenta la curva C sull'asse reale C' del piano w.