Prodotti Infiniti

Anna Scaramuzza

24/05/2004

Un prodotto infinito di numeri complessi

$$p_1 p_2 \dots p_n \dots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

si calcola computando il limite per $N \to \infty$ dei prodotti parziali $P_N = p_1 p_2 \dots p_N$.
Si dice che un prodotto converge se esiste

$$\lim_{N \to \infty} P_N$$

e se è pari a $P \neq 0$. Escludiamo il caso $P = 0$ perché se il valore $P = 0$ fosse ammesso allora ogni prodotto infinito con un fattore nullo dovrebbe convergere, mentre le convergenza non dovrebbe dipendere dall'intera sequenza di fattori.
Facciamo, quindi, la seguente posizione:

un prodotto infinito converge se e solo se ha al più un numero finito di fattori nulli e se i prodotti parziali costituiti dai fattori non nulli hanno un limite finito e non nullo.

Se abbiamo un prodotto infinito convergente allora il termine n-esimo converge ad 1, in quanto

$$p_N = \lim_{N \to \infty} \frac{P_N}{P_{N-1}} = \frac{P}{P} = 1$$

e per questo fatto si preferisce scrivere un prodotto infinito nel modo seguente:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \tag{1}$$

così che la condizione $a_n \to 0$ diventi una condizione necessaria per la convergenza. Se nessuno dei fattori è nullo allora si può confrontare il prodotto (1) con la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n) \tag{2}$$

Se denotiamo con S_N la somma parziale di N termini di (2) allora il prodotto parziale dei primi N termini si può esprimere nel seguente modo: $P_N = e^{S_N}$.
Inoltre se $S_N \to S$ allora $P_N \to e^S$ che è non nullo.
Abbiamo quindi:

Proposizione 1. La convergenza della serie (2) è una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza del prodotto. (1)

Dimostrazione.
Sufficienza:
Supponioamo che la serie (2) converga e dimostriamo che da questo segue la convergenza del prodotto infinito. Se la serie (2) coverge allora esiste

$$\lim_{N\to\infty} S_N$$

e tale limite sarà pari a S. Ne segue che $P_N = e^{S_N}$ è una sucessione convergente e precisamente converge al limite $P = e^S$ che è diverso da zero e la sufficienza è provata.
Necessità:
Supponiamo che il prodotto infinito converga e supponiamo che $P_N \to P \neq 0$. Se ciò non fosse vero, la serie data da valori principali convergerebbe al valore principale di $\log P$.
Dimostriamo che la serie converge ad un'opportuno valore di $\log P$. Per semplicità facciamo le seguenti notazioni:

$$\begin{aligned} LogA &= \text{valore principale di A} \\ ArgA &= \text{parte immaginaria di } \log \text{A} \end{aligned}$$

Poiché P_N/P allora $Log(P_N/P) \to 0$ per $N \to \infty$. Allora esiste una sucessione di interi h_N tale che:

$$Log(P_N/P) = S_N - LogP + h_N \cdot 2\pi i$$

Consideriamo la seguente differenza:

$$\begin{aligned} Log(P_{N+1}/P) - Log(P_N/P) &= S_{N+1} - LogP + h_{N+1} \cdot 2\pi i \\ &\quad -S_N + LogP - h_N \cdot 2\pi i \\ &= S_{N+1} - S_N + (h_{N+1} - h_N) \cdot 2\pi i \\ &= Log(1 + a_k) + (h_{N+1} - h_N) \cdot 2\pi i \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} Log(P_{N+1}/P) - Log(P_N/P) - Log(1 + a_{N+1}) &= (h_{N+1} - h_N) \cdot 2\pi i \\ Arg(P_{N+1}/P) - Arg(P_N/P) - Log(1 + a_{N+1}) &= (h_{N+1} - h_N) \cdot 2\pi \end{aligned}$$

Per definizione, abbiamo $|Arg(1 + a_{N+1})| \leq \pi$ e sappiamo che $Arg(P_{N+1}/P) - Arg(P_N/P) \to 0$. Ma per N sufficientemente grande questo è incompatibile con la pecedente uguaglianza a meno che $h_{N+1} = h_N$. Quindi per N sufficientemente grande $h_N = h$ e quindi segue da $Log(P_N/P) = S_N - LogP + h_N \cdot 2\pi i$ che $S_N \to LogP - h \cdot 2\pi i$. Così si ottiene la convergenza della serie e la tesi. □

Quindi la convergenza di un prodotto infinito si può ricondurre alla convergenza di una serie.

Definizione 1. Un prodotto infinito come in (1) converge assolutamente se e solo se la corrispondente serie (2) converge assolutamente.

e quindi possiamo enunciare:

Proposizione 2. Condizione necessaria e sufficiente perché un prodotto infinito (1) converga assolutamente è che converga assolutamente la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Dimostrazione.
Sufficienza:
Se $x > 0$ allora $1 + x \leq e^x$. Consideriamo i prodotti parziali:

$$\begin{aligned}
|P_N| &= \left| \prod_{k=1}^{N} \big(1 + a_k\big) \right| \\
&\leq \prod_{k=1}^{N} \big(1 + |a_k|\big) \\
&= \big(1 + |a_1|\big)\big(1 + |a_2|\big) \ldots \big(1 + |a_N|\big) \\
&\leq e^{|a_1|} e^{|a_2|} \ldots e^{|a_N|} \\
&= e^{|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_N|}
\end{aligned}$$

Se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge allora P_N è una successione limitata monotona crescente e quindi ha un limite cioè il prodotto infinito converge (e converge pure $\prod_{k=1}^{N} (1 + |a_k|)$).
Necessità:
Viceversa, consideriamo $S_N = \sum_{k=1}^{N} |a_k|$ e osserviamo che vale:

$$\begin{aligned}
P_N &= \prod_{k=1}^{N} \big(1 + |a_k|\big) \\
&= \big(1 + |a_1|\big)\big(1 + |a_2|\big) \ldots \big(1 + |a_N|\big) \\
&\geq 1 + |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_N| \\
&= 1 + S_N \\
&\geq 1
\end{aligned}$$

Se il limite $\lim_{N \to \infty} P_N$ esiste, cioè se il prodotto infinito converge, ne segue che S_N è una successione limitata monotona crescente e quindi ha un limite, cioè la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge. $\square$