

**Università degli Studi Roma Tre**  
**Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2003/2004**  
**AC1 - Analisi Complessa**  
**Tutorato 5**  
Martedì 30 marzo 2004

1. Scegliamo la determinazione del logaritmo complesso con l'argomento tra 0 e  $2\pi$ . Quale delle seguenti uguaglianze è vera? Dove non è verificata l'altra?

(a)  $(-1)^{2/3} = ((-1)^2)^{1/3} = 1^{1/3} = 1$   
(b)  $(-1)^{2/3} = (e^{\pi i})^{2/3} = e^{(2/3)\pi i} = (-1/2) + (\sqrt{3}/2)i$

2. Calcolare i seguenti integrali reali.

(a)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - \sin \theta} d\theta$   
(b)  $\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \sin^2 \theta} d\theta$

3. Calcolare i seguenti integrali reali.

(a)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$   
(b)  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$

4. Calcolare i seguenti integrali reali.

(a)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2} dx, \quad a > 0$   
(b)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx$

5. Come va interpretato l'integrale reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{a^2 - x^2} dx \quad ?$$

Quanto vale? Se  $a = \pi/2$  cosa posso concludere?

6. Determinare il numero degli zeri del polinomio  $2z^5 - 6z^2 + z + 1$  nell'anello  $1 \leq |z| \leq 2$ .

(Sugg.: usare il teorema di Rouché)

7. Sia  $\Delta$  il cerchio unitario aperto centrato nell'origine,  $S^1$  il suo bordo e  $\Omega$  un insieme aperto contenente  $\Delta$ . Sia  $f(z)$  una funzione olomorfa su  $\Omega$  t.c.  $|f(z) - z| < |z|$  su  $S^1$ . Mostrare che:

(a)  $|f'(1/2)| \leq 8$   
(b)  $f$  ha esattamente uno zero in  $\Delta$

8. Calcolare i seguenti integrali reali.

(a)  $\int_0^{+\infty} \frac{x^{1/3}}{1+x^2} dx$   
(b)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+3x+2} dx$   
(c)  $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx$