AC1 Secondo esonero

10 giugno 2004

1. Trovare, se esiste, una mappa conforme f tra le seguenti regioni:

(a) $\{\operatorname{Im} z > 0\} \xrightarrow{f} U$,

(b) $\{\operatorname{Re} z > 0\,, \operatorname{Im} z > 0\} \xrightarrow{f} U$,

(c) come in (b) con f lineare fratta,

(d) $\{0 < \operatorname{Im} z < \pi\} \xrightarrow{f} U$,

(e) come in (d) con f lineare fratta tale che $f(0) = -1$ e $f(\frac{i\pi}{2}) = \frac{i}{2}$

(f) $\{0 < |z| < 1\} \xrightarrow{f} \{|z| > 1\}$

(g) $\{0 < |z| < 1\} \xrightarrow{f} U$

(h) $\{0 < |z| < 1\} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

N.B. nel caso tale mappa non esista... dimostrarlo!

2. Sia φ una trasformazione lineare fratta con $\varphi(U) = U$ e $\varphi(0) = 0$. Mostrare che φ è una rotazione, cioè esiste $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$ tale che $\varphi(z) = \alpha z \ \ \forall\, z \in \mathbb{C}$.

3. Siano $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ due regioni semplicemente connesse.

(a) Caratterizzare i punti $z \in \mathbb{C}$ tali che $\Omega_1 \setminus \{z\}$ è ancora semplicemente connesso.

(b) Se $\Omega_1 \cup \Omega_2$ è una regione, è vero che $\Omega_1 \cup \Omega_2$ è sempre semplicemente connesso?

(c) Se $\Omega_1 \cap \Omega_2$ è una regione, è vero che $\Omega_1 \cap \Omega_2$ è sempre semplicemente connesso?

4. Scrivere $\cos(\sqrt{z})$ come prodotto infinito e calcolarne il genere.

N.B. Qui $U := \{z \in \mathbb{C} \ \ | \ \ |z| < 1\}$. Una regione è un aperto connesso non vuoto.