Esercitazioni AC1

Anna Scaramuzza

01/04/2004

Esercizio 1. Si calcoli l'integrale reale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}$$

Soluzione. Passiamo al campo dei complessi e consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + z^2 + 1}$$

Osserviamo subito che $deg(N) < deg(D)$ e che i poli sono complessi, infatti sono:

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{i\frac{\pi}{3}} \\ z_2 &= e^{i\frac{4\pi}{3}} \\ z_3 &= e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ z_4 &= e^{i\frac{5\pi}{3}} \end{aligned}$$

Fissiamo la curva chiusa data dal segmento $\gamma_1 = [-R, R]$ e dalla semicirconferenza γ_2 congiungente gli estremi del segmento. Per il Teorema dei Residui abbiamo che:

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} \frac{dz}{z^4 + z^2 + 1} = 2\pi i \Big(Res(f, z_1) + Res(f, z_3) \Big)$$

Calcoliamo i residui:

$$\begin{aligned} Res(f, z_1) &= \frac{1}{4z^3 + 2z\big|_{z_1}} \\ &= \frac{1}{-3 + i\sqrt{3}} \\ Res(f, z_3) &= \frac{1}{4z^3 + 2z\big|_{z_3}} \\ &= \frac{1}{3 + i\sqrt{3}} \end{aligned}$$

calcolati i residui, passiamo al limite per $R \to +\infty$, l'integrale su γ_2 per $R \to +\infty$ tende a zero quindi

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1} &= 2\pi i\left(\frac{1}{-3+i\sqrt{3}}+\frac{1}{3+i\sqrt{3}}\right)\\ &= \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

Esercizio 2. Si dimostri che

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{x+1}dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

dove $0 < p < 1$

Soluzione. Passiamo al campo dei complessi. Il punto $z = 0$ è un punto do diramazione per la funzione integranda e quindi per calcolare l'integrale conviene considerare la curva data da:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= [\varepsilon, R]\\ \gamma_2 &= \text{circ di raggio } R\\ \gamma_3 &= [R, \varepsilon]\\ \gamma_4 &= \text{circ di raggio } \varepsilon\end{aligned}$$

Questa curva chiusa racchiude l'unico polo che possiede la funzione, quindi applicando il Teorema dei Residui otteniamo:

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} \frac{z^{p-1}}{1+z}dz = 2\pi i Res\left(\frac{z^{p-1}}{1+z}, -1\right)$$

Poiché

$$Res\left(\frac{z^{p-1}}{1+z}\right) = z^{p-1} = e^{\pi i(p-1)}$$

allora

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} \frac{z^{p-1}}{1+z}dz = 2\pi i e^{\pi i(p-1)}$$

Il primo membro dell' equazione soprascritto si spezza nella somma di quattro integrali: uno per ogni curva γ_i. Passando al limite per $R \to +\infty$ e per $\varepsilon \to 0$ si vede che gli integrali sulle due circonferenze non forniscono alcun contributo. Analizziamo gli altri due integrali:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \frac{z^{p-1}}{1+z}dz &= \lim_{R\to+\infty \varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{R} \frac{z^{p-1}}{1+z}dz\\ \int_{\gamma_3} \frac{z^{p-1}}{1+z}dz &= \lim_{R\to+\infty \varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{R} \frac{(ze^{2\pi i})^{p-1}}{1+ze^{2\pi i}}dz\end{aligned}$$

dove nell'ultimo integrale compare il fattore $e^{2\pi i}$ perché teniamo conto di aver percorso la circonferenza γ_2. Tenendo conto di quanto scritto, passiamo al limite, ottenendo:

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to+\infty\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{R}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz+\lim_{R\to+\infty\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{R}\frac{(ze^{2\pi i})^{p-1}}{1+ze^{2\pi i}}dz &= 2\pi i e^{(p-1)\pi i}\\
\int_{0}^{+\infty}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz+\int_{+\infty}^{0}e^{2\pi i(p-1)}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz &= -2\pi i e^{p\pi i}\\
\int_{0}^{+\infty}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz-\int_{0}^{+\infty}e^{2\pi i(p-1)}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz &= -2\pi i e^{p\pi i}\\
(1-e^{2\pi i(p-1)})\int_{0}^{+\infty}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz &= -2\pi i e^{p\pi i}
\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{+\infty}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz &= -\frac{2\pi i e^{p\pi i}}{(1-e^{2\pi i(p-1)})}\\
&= -\frac{2\pi i e^{p\pi i}}{1-e^{2\pi i p}}\\
&= -\frac{2\pi i}{e^{\pi i p}-e^{\pi i p}}\\
&= -\frac{\pi}{\sin \pi p}
\end{aligned}$$

Esercizio 3. Si calcoli l'integrale reale:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{a+sin^2\theta}$$

dove a è un parametro reale tale che $|a|>1$

Soluzione. Passiamo al campo complesso con il seguente cambiamento di variabile $z=e^{i\theta}$:

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{a+sin^2\theta} &= \frac{1}{4}\int_{|z|=1}\frac{dz}{a+\left(\frac{2iz-1}{2iz}\right)^2}\frac{1}{iz}\\
&= -\int_{|z|=1}\frac{4z^2dz}{4az^2-z^4-1+2z^2}\frac{i}{4z}\\
&= \int_{|z|=1}\frac{zidz}{z^4-2z^2(1+2a)+1}
\end{aligned}$$

La funzione integranda ammette 4 poli distinti in quanto il denominatore è un polinomio biquadratico con $\Delta=4a^2+4a\neq 0$. Le soluzioni sono:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{1+2a+2\sqrt{a^2+a}}\\
z_2 &= -\sqrt{1+2a+2\sqrt{a^2+a}}\\
z_3 &= \sqrt{1+2a-2\sqrt{a^2+a}}\\
z_4 &= -\sqrt{1+2a-2\sqrt{a^2+a}}
\end{aligned}$$

e sono tali che $|z_1|, |z_2| > 1$ e $|z_3|, |z_4| < 1$. Per il Teorema dei Residui abbiamo che

$$\int_{|z|=1} \frac{zidz}{z^4 - 2z^2(1+2a)+1} = 2\pi\Big(Res(f, z_3) + Res(f, z_4)\Big)$$

dove f denota la funzione integranda $\frac{z}{z^4-2z^2(1+2a)+1}$. Quindi

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=1} \frac{zidz}{z^4 - 2z^2(1+2a)+1} &= 2i\pi\left(\frac{z_3}{4z_3(z_3^2-(1+2a))} + \frac{z_4}{4z_4(z_4^2-(1+2a))}\right) \\
&= \frac{\pi i}{2}\frac{1}{-\sqrt{a^2+a}} \\
\int_{|z|=1} \frac{zdz}{z^4 - 2z^2(1+2a)+1} &= \frac{\pi}{2\sqrt{a^2+a}}
\end{aligned}$$

Esercizio 4. Si calcoli l'integrale reale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}dx$$

Soluzione. Passiamo al campo complesso e consideriamo l'integrale su una curva chiusa costituita da una circonferenza di raggio R, due segmenti e da una semiciconferenza di raggio ε:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \text{circ di raggio } R \\
\gamma_2 &= [R, 0] \\
\gamma_3 &= \text{semicirc di raggio } \varepsilon \\
\gamma_4 &= [0, R]
\end{aligned}$$

Per il Teorema dei Residui

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}dz = 2i\pi\left(Res\left(\frac{\sqrt{z}}{z^2+1}, i\right) + Res\left(\frac{\sqrt{z}}{z^2+1}, -i\right)\right)$$

Calcoliamo i residui:

$$\begin{aligned}
Res\left(\frac{\sqrt{z}}{z^2+1}, i\right) &= \frac{i^{\frac{1}{2}}}{2i} \\
&= e^{\frac{i\pi}{4}} \quad \text{perché } \; i = e^{i\frac{\pi}{2}} \\
Res\left(\frac{\sqrt{z}}{z^2+1}, -i\right) &= \frac{(-i)^{\frac{1}{2}}}{-2i} \\
&= e^{\frac{3i\pi}{4}} \quad \text{perché } \; -i = e^{i\frac{3\pi}{2}}
\end{aligned}$$

così l'uguaglianza sopra scritta diventa:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}dz &= 2i\pi(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{3\pi}{4}}) \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Il primo membro dell'uguaglianza è pari alla somma di quattro integrali: uno per ogni tratto di curva, calcoliamoli iniziando da:

$$\int_{\gamma_1} \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}dz \quad = \quad \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}dz$$

dove δ è un angolo infinitesimo che non influisce nel calcolo dell'integrale, quindi si può trascurare. Sulla circonferenza $z = Re^{it}$ con $0 < t < 2\pi$ quindi l'integrale diventa:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}dz &= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{R}}{R^2e^{2it}+1}Rdt \\
&\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{R^{\frac{3}{2}}}{R^2e^{2it}+1} \right| dt \\
&< \int_0^{2\pi} \frac{R^{\frac{3}{2}}}{R^2-1}dt \\
&= 2\pi \frac{R^{\frac{3}{2}}}{R^2-1} \to 0 \quad \text{per} \quad R \to \infty
\end{aligned}$$

L'integrale

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_3} \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}dz &= \int_{3\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon^2e^{2it}+1}\varepsilon dt \\
&\leq \int_{3\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon^2e^{2it}+1}\varepsilon \right| dt \\
&\leq \int_{3\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\varepsilon^{\frac{5}{2}}}{\varepsilon^2-1} \right| dt \\
&= -\pi \frac{\varepsilon^{\frac{5}{2}}}{\varepsilon^2-1}dt \to 0 \quad \text{per} \quad \varepsilon \to 0
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2+\gamma_4} \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}dz &= \lim_{R\to\infty \varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}dz + \int_{R}^{\varepsilon} \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}dz \\
&= \lim_{R\to\infty \varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}dz - \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sqrt{-z}}{z^2+1}dz \\
&= 2\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}dx \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

da cui

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}dx \quad = \quad \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$