

**Università degli studi di Roma Tre**  
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2002/2003**

**TN01 - Tutorato - Andrea Cova**

Mercoledì 7 maggio 2003

**1.**

- (1) Calcolare il simbolo di Jacobi:  $\left(\frac{7+\lambda}{253}\right)$  per ogni  $\lambda$ , con  $0 \leq \lambda \leq 2$  (si noti che  $11 \mid 253$ ).
- (2) Determinare, in funzione di  $\lambda$ , con  $0 \leq \lambda \leq 2$ , le eventuali soluzioni della congruenza:

$$X^2 \equiv 7 + \lambda \pmod{253}.$$

**2.**

- (1) Dati due interi positivi  $a$  ed  $n$ , con  $\text{MCD}(a, n) = 1$ , descrivere quali relazioni intercorrono fra il valore del simbolo di Jacobi  $\left(\frac{a}{n}\right)$  e la risolubilità della congruenza  $X^2 \equiv a \pmod{n}$ .
- (2) Calcolare il simbolo di Jacobi  $\left(\frac{33}{91}\right)$ .
- (3) Determinare tutte le eventuali soluzioni della congruenza  $X^2 \equiv p \pmod{q}$ , al variare degli interi primi  $p$  e  $q$ , tali che  $p \mid 33$  e  $q \mid 91$ .

**3.**

- (1) Calcolare il simbolo di Jacobi:  $\left(\frac{3+a}{299}\right)$  per ogni  $a$ , con  $0 \leq a \leq 2$  (si noti che  $13 \mid 299$ ).
- (2) Determinare le eventuali soluzioni della congruenza:  $X^2 \equiv 5 \pmod{299}$ .

**4.**

- (1) Dati due interi positivi  $a$  ed  $n$ , con  $\text{MCD}(a, n) = 1$ , descrivere quali relazioni intercorrono fra il valore del simbolo di Jacobi  $\left(\frac{a}{n}\right)$  e la risolubilità della congruenza  $X^2 \equiv a \pmod{n}$ .
- (2) Calcolare il simbolo di Jacobi  $\left(\frac{15}{19}\right)$ .
- (3) Determinare tutte le eventuali soluzioni della congruenza  $X^2 \equiv p \pmod{q}$ , al variare degli interi primi  $p$  e  $q$ , tali che  $p \mid 15$  e  $q \mid 119$ .

**5.** Determinare se la seguente congruenza è risolubile ed eventualmente trovarne tutte le soluzioni:  $3X^2 + 4X + 2 \equiv 0 \pmod{33}$ .

**6.** Determinare in funzione di  $\lambda$ , con  $0 \leq \lambda \leq 10$ , quando la congruenza quadratica  $X^2 + 4X + 7\lambda \equiv 0 \pmod{11}$  è risolubile. Per ciascun valore di  $\lambda$ , con  $0 \leq \lambda \leq 10$ , per il quale la congruenza è risolubile determinare tutte le sue soluzioni.

**7.** Trovare tutte le eventuali soluzioni della congruenza:

$$9X^2 - 12X + 4 \equiv 4 - \lambda \pmod{13}$$

al variare di  $\lambda$ , con  $0 < \lambda < 12$ .

**8.** Sia  $p > 3$  un numero primo: si dimostri che  $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$  se  $p \equiv 1 \pmod{6}$  e  $\left(\frac{-3}{p}\right) = -1$  se  $p \equiv 5 \pmod{6}$ .

**9.** Dimostrare che esistono infiniti numeri primi  $p$  della forma  $p \equiv 1 \pmod{6}$  e  $p \equiv 1 \pmod{8}$ .