Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2002/2003
TN01 - Tutorato - Andrea Cova
Mercoledì 5 marzo 2003

1. Data lequazione diofantea:

$$(2\lambda + 3)X + 5Y + \lambda Z = 4$$

(1) determinare per quali valori di $\lambda, \lambda \in \mathbb{Z}$, l'equazione assegnata è risolubile;
(2) per il più piccolo valore positivo di λ per il quale l'equazione assegnata è risolubile, scrivere esplicitamente le soluzioni.

2. Trovare tutte le soluzioni della congruenza:

$$4X + 3Y \equiv 5 \pmod{6}.$$

3. Trovare tutte le eventuali soluzioni del sistema seguente al variare del parametro $\lambda, 1 \leq \lambda \leq 10$:

$$\begin{cases} 5\lambda X + 2Y \equiv 3 \pmod{10} \\ \lambda X - Y \equiv 2 \pmod{10} \end{cases}$$

4. Determinare tutte le eventuali soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 2X \equiv 3 \pmod{5} \\ 3X \equiv 4 \pmod{7} \\ 3X \equiv \pmod{8} \\ 6X \equiv \pmod{13} \end{cases}$$

5. Determinare con il metodo della *esponenziazione modulare* il più piccolo intero non negativo congruo a 371 (modulo 17).

6. Si supponga di avere a disposizione banconote da 50, da 200 e da 500 euro. Determinare tutte le possibili combinazioni di questi tre gruppi di banconote per ottenere la somma di 25.000 euro in modo da prendere almeno una banconota per ogni gruppo.

7. Provare che:

(1) ogni primo della forma $3n + 1$ è anche della forma $6m + 1$;
(2) ogni intero della forma $3n + 2$ possiede un fattore primo della stessa forma;
(3) l'unico primo della forma $3n + 2$ è 7;
(4) l'unico primo tale che $3n + 1$ è un quadrato perfetto, $n = 5$

8. Data lequazione diofantea:

$$(3\lambda + 1)X + 5Y = 10,$$

(1) determinare per quali valori di $\lambda, \lambda \in \mathbb{Z}$, l'equazione assegnata è risolubile;
(2) per il più piccolo valore positivo di λ per il quale l'equazione assegnata è risolubile; scrivere esplicitamente le soluzioni.

9. Dato il sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 3X + 2\lambda Y \equiv 4 \pmod 9 \\ \quad X - 2Y \equiv 1 \pmod 9 \end{cases}$$

(1) Determinare per quali valori di $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 8$, il sistema ammette un'unica soluzione;
(2) Trovare le soluzioni del sistema per $\lambda = 5$.

10. Studiare quando il seguente sistema di congruenze ammette un'unica soluzione al variare del parametro $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 5$:

$$\begin{cases} 3X + 2\lambda Y \equiv 4 \pmod 6 \\ \quad X - 2Y \equiv 1 \pmod 6 \end{cases}$$

e trovare le eventuali soluzioni.

11. Sia $\{k_1, \cdots, k_{\varphi(n)}\}$ un sistema ridotto di residui (modulo n). Sia $a \in \mathbb{Z}$ tale che $\text{MCD}(a, n) = 1$, allora l'insieme $\{ak_1, \cdots, ak_{\varphi(n)}\}$ è ancora un sistema ridotto di residui (modulo n).

12. Sia p un numero primo e siano $a, b \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che:

$$(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p.$$

13. Sia $p \geq 5$ un primo, mostrare che: $2(p-3)! \equiv -1 \pmod p$.

14. Mostrare che se n è un numero pseudoprimo dispari, anche $N := 2^n - 1$ è un numero pseudoprimo dispari.

15. Se $n > 2$ mostrare che:

(1) $\varphi(n)$ è pari;
(2) se $\{k_1, \cdots, k_{\varphi(n)}\}$ è un sistema ridotto di residui (modulo n), allora $k_1 + \cdots + k_{\varphi(n)} \equiv 0 \pmod n$.