Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2002/2003
TN01 - Tutorato - Andrea Cova
Mercoledì 30 aprile 2003

1. Determinare, in funzione di λ, con $0 \leq \lambda \leq 10$, quando la congruenza quadratica $3X^2+7X+3\lambda+9 \equiv 0 \pmod{11}$ è risolubile e, per ciascun λ per il quale la congruenza è risolubile, determinare tutte le soluzioni.

2. Sia $p = 23$, sia $a \geq 1$ e sia $S(a) = \{ka : 1 \leq k \leq 11\}$.

(1) Determinare, per $a = 5, 9, 10, 11$, l'insieme $N(a)$ degli elementi di $S(a)$ che hanno resto, nella divisione per p, compreso tra $\frac{p+1}{2}$ e $p-1$.
(2) Determinare $n(a) := \sharp(N(a))$.
(3) Verificare che $r = -2$ è una radice primitiva $\pmod{23}$, calcolare $\mathrm{ind}_r(a)$ per $a = 5, 9, 10, 11$ e verificare che $n(a) \equiv \mathrm{ind}_r(a) \pmod{2}$.
(4) Calcolare il simbolo di Legendre $(\frac{a}{p})$ per $a = 5, 9, 10, 11$.

3. Usando la LRQ (Legge di Reciprocità Quadratica di Gauss) determinare i primi p per i quali -5 è un residuo quadratico.

4. Usando la LRQ, calcolare il simbolo di Legendre: $(\frac{131}{991})$.

5. Determinare in funzione di λ, con $0 \leq \lambda \leq 6$, quando la congruenza quadratica $X^2 + 5X + \lambda \equiv 0 \pmod{7}$ è risolubile. Per ciascun valore di λ, con $0 \leq \lambda \leq 6$, per il quale la congruenza è risolubile determinare tutte le sue soluzioni.

6. Determinare per quali primi p la congruenza $X^4 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ ha soluzioni.

7. Determinare tutte le eventuali soluzioni della congruenza quadratica: $3X^2 + 2X + 3 \equiv 0 \pmod{33}$.

8. Calcolare $(\frac{-26}{73}); (\frac{19}{73}); (\frac{33}{73})$.

9. Dimostrare che esistono infiniti primi p della forma: $p = 4k + 1$ e $p = 8k - 1$.