Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2002/2003
TN01 - Tutorato - Andrea Cova
Mercoledì 21 maggio 2003

1. Sia $*$ il prodotto di Dirichlet di funzioni aritmetiche. Si ponga $F := \sigma * \tau$.

(1) Calcolare $F(15)$;
(2) Sia f la funzione aritmetica determinata dalla formula di inversione di Möbius tale che $F = f * 1$. Calcolare $f(15)$.

2. Sia $*$ il prodotto di Dirichlet di funzioni aritmetiche. Si ponga $F := \sigma * \varphi$.

(1) Calcolare $F(7)$;
(2) Mostrare che F è invertibile rispetto a $*$ (cioè , esiste F^{-1} tale che $F*F^{-1} = u$, dove u è l'elemento neutro rispetto a $*$) e calcolare $F^{-1}(7)$.
(3) Sia f la funzione aritmetica determinata dalla formula di inversione di Mobius tale che $F = f * 1$. Calcolare $f(7)$.
(4) Calcolare il simbolo di Jacobi $(\frac{3F(7)}{5f(7)})$.

3. Sia τ la funzione aritmetica che enumera i divisori positivi e si ponga $F(n) := \sum_{d|n} d\tau(d)$. Calcolare $F(45)$.

4. Sia f una funzione (aritmetica) moltiplicativa. Mostrare che f totalmente moltiplicativa se e soltanto se $f^{-1} = \mu f$.

5. Sia $n = p_1^{e_1} p2 \cdots p_r^{e_r}$ la fattorizzazione in primi di $n \geq 2$ (con $e_i \geq 1$ per $1 \leq i \leq r$). Sia $t \in \mathbb{C}$ fissato. Si definisce:

$$\omega_t(n) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Mostrare che:

(1) $\omega_t : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{C}$ è una funzione moltiplicativa.
(2) $\sum_{d|n} \omega_t(d) = \sum_{i=1}^{r} (1 + e_i t)$.

6. Mostrare che, per ogni $k \geq 0$,

(1) $(e^k)^{-1} = \mu e^k$;
(2) $(\sigma^k) - 1 = \mu e^k * \mu$.

7. Siano f, g, h tre funzioni aritmetiche. Mostrare che:

(1) $(f + g) * h = (f * h) + (g * h)$;
(2) se f è totalmente moltiplicativa, allora: $f(g * h) = fg * fh$, (dove, al solito, $(f + g)(n) := f(n) + g(n)$ e $(fg)(n) := f(n)g(n)$, per ogni n).

8.. Sia f una funzione moltiplicativa, non costante su 0. Mostrare che:

(1) se n è privo di fattori quadratici, allora: $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$;
(2) per ogni primo p, $f^{-1}(p^2) = (f(p))^2 - F(p^2)$.