Soluzioni

31/03/2003

Esercizio 1. Sia $Z = g(X)$ una v.a. funzione della v.a. continua X con funzione di densità $f_X(x)$, poniamo $\mathbf{X} = supp(X) = \{x : f_X(x) > 0\}$ e $\mathbf{Z} = supp(Z) = \{z : f_Z(z) > 0\}$ allora se
(i) $g : \mathbf{X} \to \mathbf{Z}$ è una funzione biunivoca,
(ii) la derivata di $x = g^{-1}(z)$ rispetto a z è continua e diversa da zero in $\mathbf{Z}$ si ha:

$$f_Z(z) = |\frac{d}{dz}g^{-1}(z)| f_X(g^{-1}(z)) I_{\mathbf{Z}}(z).$$

Nel nostro caso:

$$g^{-1}(z) = \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{1/c},$$

quindi

$$f_Z(z) = \lambda c \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{\frac{c-1}{c}} e^{-\lambda\left(\frac{z}{\lambda}\right)^{\frac{c}{c}}} \frac{1}{c}\left(\frac{z}{\lambda}\right)^{\frac{1-c}{c}} I_{\mathbf{Z}}(z) = e^{-z} I_{(0,\infty)}(z)$$

con $\mathbf{Z} = \{z \in \mathbb{R} : z > 0\}$ da cui

$$Z \sim Exp(1). \qquad \Box$$

Esercizio 2. Se $Y = g(X) = X/(1+X)$ allora $X = g^{-1}(Y) = Y/(1-Y)$. Osserviamo che se $\mathbf{X} = supp(X) = (0, \infty)$ si ha

$$\mathbf{Y} = supp(Y) = g(\mathbf{X}) = (0, 1).$$

La funzione g così definita soddisfa le ipotesi del metodo della trasformazione. Quindi essendo

$$|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)| = \frac{1}{(1-y)^2},$$

si ha

$$f_Y(y; a, b) = \frac{1}{B(a,b)} \frac{y^{a-1}}{(1-y)^{a-1}} (1-y)^{a+b} \frac{1}{(1-y)^2} I_{(0,1)}(y) = \frac{1}{B(a,b)} y^{a-1}(1-y)^{b-1} I_{(0,1)}(y).$$

Da cui

$$Y \sim Beta(a, b). \qquad \Box$$

Esercizio 3. La dimostrazione si basa sulla proprietà di linearità del valore atteso e sulla definizione di covarianza ($Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$).

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right) =$$

$$= E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right)\right) - E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) E\left(\sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right) =$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j X_i Y_j\right) - \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) \sum_{j=1}^{m} b_j E(Y_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j E(X_i Y_j) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j E(X_i) E(Y_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j (E(X_i Y_j) - E(X_i)E(Y_j)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j Cov(X_i, Y_j). \qquad \square$$

Esercizio 4. (a) Sia X è una v.a., che ammette i momenti primi e secondi, allora si ha in generale

$$Var(X) = E(X^2) - (EX)^2.$$

Quindi possiamo scrivere per S:

$$(ES)^2 = E(S^2) - Var(S),$$

e per la correttezza di S^2 abbiamo

$$(ES)^2 = \sigma^2 Var(S) < \sigma^2.$$

Da cui

$$ES < \sigma.$$

(b) Ricordiamo che se $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ si ha che

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

Ora per calcolare la distorsione di S dobbiamo prima calcolare la sua media, per fare questo avremmo bisogno della sua distribuzione che però non è nota, calcoliamo quindi la media di $\sqrt{W}$ dove

$$W := \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}.$$

$$E\left(\sqrt{W}\right) = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} dx =$$
$$= \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} dx,$$

operando il cambio di variabile $y = \frac{1}{2}x$ si ha:

$$\frac{2^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^\infty y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y} dy = \frac{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\sqrt{2}$$

ovvero

$$E\left(\sqrt{(W)}\right) = \frac{\sqrt{n-1}E(S)}{\sigma} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\sqrt{2}$$

da cui si ricava che la distorsione di S è data da

$$Bias(S) = E(S) - \sigma = \sigma\left(\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} - 1\right). \qquad \square$$

Esercizio 5. uno stimatore lineare T ha la generica forma:

$$T = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i,$$

affinché T sia corretto è necessario che $E(T) = \theta$, ovvero:

$$ET = E\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i E(X_i) = \theta \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i = \theta$$

da cui la condizione:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i = 1.$$

Ricordiamo che, in generale, se T è uno stimatore allora:

$$MSE(T) = Var(T) + Bias^2(T),$$

ma essendo il nostro stimatore corretto avremo che

$$MSE(T) = Var(T) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 Var(X_i) = \theta \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 w_i.$$

Per trovare lo stimatore T con MSE minimo dobbiamo risolvere un problema di minimo vincolato, definiamo quindi la funzione *Langrangiana*:

$$l(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \lambda) = \theta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 w_i - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i - 1 \right)$$

e poniamo uguale a zero le derivate prime parziali:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} l(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \lambda) = 2\theta \alpha_i w_i - \lambda w_i = 0 \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} l(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i - 1 = 0.$$

Dal sistema di equazion segue che:

$$\alpha_i = \frac{\lambda}{2\theta} \qquad \forall i = 1, \dots, n,$$

$$\lambda = \frac{2\theta}{\sum w_i},$$

da cui sostituendo l'espressione per λ dell'ultima equazione si ha che:

$$\alpha_i = \frac{1}{\sum w_i} \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

Quindi lo stimatore ottimale T^* è dato da

$$T^* = \frac{1}{\sum w_i} \sum_{i=1}^{n} X_i. \qquad \square$$

Esercizio 6. Una funzione di densità appartiene alla famiglia esponenziale se può essere rappresentata come

$$f(x; \theta) = D(x) \exp\{A(\theta) T(x) + C(\theta)\}$$

Nel nostro caso si ha:

$$f(x; \theta) = \binom{k + x - 1}{x} \theta^k (1 - \theta)^x =$$

$$= \binom{k + x - 1}{x} \exp\{x \lg(1 - \theta) + k \lg \theta\},$$

Quindi ponendo

$$\begin{aligned}A(\theta) &= \lg(1-\theta)\\ T(x) &= x\\ C(\theta) &= k\lg\theta\\ D(x) &= \binom{k+x-1}{x}\end{aligned}$$

dimostriamo che anche la famiglia *Binomiale Negativa* appartiene alla famiglia esponenziale. Ora per il Teorema di Fattorizzazione si deduce che

$$\sum_{i=1}^{n} T(X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

è una statistica sufficiente per il parametro θ. $\square$