Tutorato
16/5/2003

Esercizio 1. Consideriamo una variabile aleatoria x con distribuzione:

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x) \qquad \theta > 0.$$

Per controllare l'ipotesi $H_0 : \theta \leq 1$ contro $H_1 : \theta > 1$ si è scelto un campione di ampiezza 2 e si è utilizzati il test con regione critica data da:

$$C_\alpha = \{(x_1, x_2) : \frac{3}{4} x_1 \leq x_2\}.$$

Trovare la funzione potenza $\pi(\theta)$ e l'ampiezza α del test.

Esercizio 2. Sia x un'osservazione singola dalla densità:

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x) \qquad \theta > 0.$$

(a) Nel controllare l'ipotesi $H_0 : \theta \leq 1$ contro l'alternativa $H_1 : \theta > 1$ determinare la funzione potenza e l'ampiezza del test con regione critica data da:

$$C_\alpha = \{x : x \geq \frac{1}{2}\}.$$

(b) Determinare un test UMP di ampiezza α per $H_0 : \theta = 2$ contro $H_1 : \theta = 1$.
(c) Fra tutti i test possibili di tipo LRT per $H_0 : \theta = 2$ contro $H_1 : \theta = 1$ trovare quello che minimizza la quantità $\alpha + \beta$.
(d) Determinare un test UMP di ampiezza α per $H_0 : \theta \leq 2$ contro $H_1 : \theta > 2$.
(e) Trovare il test LRT di ampiezza α per $H_0 : \theta = 1$ contro $H_1 : \theta \neq 1$.

Esercizio 3. Sia x un'osservazione singola estratta dalla densità:

$$f(x;\theta) = (2\theta x + 1 - \theta) I_{[0,1]} \qquad \theta \in [-1, 1].$$

(a) Trovare il test UMP di dimensione α per controllare $H_0 : \theta = 0$ contro $H_1 : \theta = 1$.
(b) Per controllare $H_0 : \theta \leq 0$ contro $H_1 : \theta > 0$ si è usato il test con regione critica:

$$C_\alpha = \{x : x > \frac{1}{2}\},$$

determinare la funzione potenza.
(c) Determinare il test LRT di ampiezza α per $H_0 : \theta = 0$ contro $H_1 : \theta \neq 0$.

Esercizio 4. Consideriamo due campioni indipendenti $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ generati rispettivamente da due v.a. di tipo Normale $N(\mu_x, \sigma^2)$ e $N(\mu_y, \sigma^2)$. Utilizzando il LRT controllare l'ipotesi nulla $H_0 : \mu_x = \mu_y$ contro $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$.

Esercizio 5. Consideriamo due campioni indipendenti $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ generati rispettivamente da due v.a. di tipo Normale $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ e $N(\mu_y, \sigma_y^2)$. Utilizzando il LRT controllare l'ipotesi nulla $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ contro $H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$.