Tutorato
31/03/2003

Esercizio 1. Sia X v.a. con funzione di densità di tipo *Weibull*:

$$f_X(x;\lambda,c) = \lambda c x^{c-1} e^{\lambda x^c} I_{[0,\infty)}(x).$$

Dimostrare che se $Z = \lambda X^c$ allora

$$Z \sim Exp(1).$$

Esercizio 2. Sia X v.a. con funzione di densità di tipo *Beta di secondo tipo*:

$$f_X(x;a,b) = \frac{1}{B(a,b)} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} I_{(0,\infty)}(x),$$

dove $a > 0$ e $b > 0$. Trovate la distribuzione di $Y = X/1+X$.

Esercizio 3. Consideriamo i due insiemi di variabili aleatorie $X_1,\ldots,X_n$ e $Y_1,\ldots,Y_n$ e due insiemi di costanti $\{a_1,\ldots,a_n\}$ e $\{b_1,\ldots,b_m\}$, allora date le due combinazioni lineari

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \qquad \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j,$$

si ha che

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j Cov(X_i, Y_j)$$

Esercizio 4. Siano $X_1,\ldots,X_n$ v.a. *iid* con varianza finita σ^2. Consideriamo la statistica campionaria

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

dove

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

è la media campionaria.
(a) Verificare che $S = \sqrt{S^2}$ è uno stimatore non corretto di σ.
(b) Supponendo che $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, trovare una rappresentazione della distorsione di S.

Esercizio 5. Siano $X_1, \ldots, X_n$ v.a. di Poisson indipendenti con rispettivi parametri $\theta w_1, \ldots, \theta w_n$, dove le quantità $w_1, \ldots, w_n$ sono costanti note mentre θ è un parametro incognito. Determinare lo stimatore corretto per θ con MSE minimo fra gli stimatori lineari.

Esercizio 6. Rappresentare la funzione di densità di una v.a. *Binomiale Negativa* di parametri n e θ:

$$f(x; \theta) = \binom{k + x - 1}{x} \theta^k (1 - \theta)^x$$

nei termini della famiglia esponenziale e trovare una statistica sufficiente per il suo parametro.