

Università degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2002/2003
Docente: Prof. M. Pontecorvo - Esercitatore: Dott. L. Di Marco - Tutori: L. Di
Biagio, P. Tranquilli

Tutorato del 21/5/2003

- 9.1** Sia C un sottoinsieme compatto in $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_e)$. Verificare che $Fr(C)$ è compatto.
- 9.2** Siano $a \leq b$ punti della retta euclidea. Dimostrare che $X := [a, b] \cap \mathbb{Q}$ non è compatto trovando un ricoprimento aperto di X che non possiede un sottoricoprimento finito.
- 9.3** Sia (X, \mathcal{T}) uno spazio topologico metrizzabile.
- (i) Verificare che ogni sottoinsieme compatto C di (X, \mathcal{T}) è chiuso e limitato.
 - (ii) Verificare che esistono sottoinsiemi chiusi e limitati di uno spazio metrizzabile (X, \mathcal{T}) che non sono compatti.
- 9.4** Verificare che l'insieme $O(n, \mathbb{R})$ delle matrici quadrate ortogonali di ordine n è un sottoinsieme compatto in $(\mathcal{M}(n, \mathbb{R}), \mathcal{T}_e)$, dove $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ è l'insieme delle matrici quadrate di ordine n e dove \mathcal{T}_e è la topologia indotta dalla topologia euclidea di \mathbb{R}^{n^2} tramite l'isomorfismo $\mathbb{R}^{n^2} \cong \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$.
- 9.5** Determinare un esempio di spazio topologico (X, \mathcal{T}) tale che:
- (i) (X, \mathcal{T}) ha un sottoinsieme compatto non chiuso.
 - (ii) (X, \mathcal{T}) ha un sottoinsieme compatto con chiusura non compatta.
- 9.6** Dimostrare che $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è compatto per ogni $n \geq 1$.