GE2 - Tutorato IX - Lunedì 2 dicembre 2002

1. Sia $\mathbb{E}^2$ un piano euclideo con riferimento cartesiano standard Oe_1e_2. Sia $\mathcal{C}$ una conica euclidea generica di equazione $f(x,y) = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a_{01}X + 2a_{02}Y + a_{00} = 0$. Dimostrare che (x_0, y_0) è centro di simmetria per $\mathcal{C}$ se, e solo se, $\bigtriangledown f(x_0, y_0) = 0$ (ovvero le derivate parziali di f calcolate in (x_0, y_0) sono entrambe nulle). Dire se e quanti centri di simmetria esistono se $\mathcal{C}$ è un' iperbole, un' ellisse o una parabola.

2. Sia $\mathbb{E}^2$ un piano euclideo con riferimento cartesiano standard Oe_1e_2. Si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione $X^2 + Y^2 + 2XY + 2X - Y - 3 = 0$.

   (a) Assicurarsi che $\mathcal{C}$ è una parabola non degenere

   (b) Trovare un'isometria che riduce la parabola nella sua forma canonica

   (c) Trovare il vertice, il fuoco, l'asse di simmetria e la retta direttrice di $\mathcal{C}$

3. In ciascuno dei seguenti casi omogeneizzare il polinomio $f(x,y)$ ($f(x,y) \to F(x_0, x_1, x_2)$) e trovare i punti all'inifinito della curva $f(x,y) = 0$.

   (a) $f(x,y) = y - x + 1$

   (b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

   (c) $f(x,y) = y - x^3$

   (d) $f(x,y) = x^4 - y^3 - 1 = 0$

4. Sia $\mathbb{E}^2$ un piano euclideo con riferimento cartesiano standard Oe_1e_2. Sia $\mathcal{C}$ l'iperbole non degenere di equazione $X^2+8XY+Y^2+2X+2Y+1 = 0$

   (a) Trovare il centro di simmetria

   (b) Trovare gli assi di simmetria (senza ridurre la conica a forma canonica)

   (c) Trovare gli asintoti (attraverso i punti all'infinito)

   (d) Farne un disegno approssimativo.