GE2 - Tutorato V - Lunedì 28 ottobre 2002

1. Sia X la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. $X^t X$ è diagonalizzabile?

2. Sia b la forma bilineare simmetrica definita su $\mathbb{R}^3$, rispetto alla base canonica $\mathbb{E}$, dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
   (a) Verificare in almeno due modi che b è definita positiva (cioè: b è un prodotto scalare).
   (b) Determinare una base $\mathbb{F}$ dello spazio vettoriale in cui b ha forma canonica.
   (c) Calcolare $b((1,1,1),(2,5,3))$, dove le coordinate dei vettori sono espresse in base $\mathbb{F}$
   (d) Sia T l'operatore lineare di $\mathbb{R}^3$ definito (rispetto ad $\mathbb{E}$) dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   (e) Scrivere la matrice di T rispetto alla base $\mathbb{F}$
   (f) T è un operatore unitario?
   (g) T è un operatore autoaggiunto?

3. Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ definito, rispetto ad una base $\mathbb{E}$ di $\mathbb{R}^2$, dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
   Verificare se T è autoaggiunto o unitario. Quindi dire se esiste un prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$ in cui T è autoaggiunto o unitario.

4. In $\mathbb{R}^3$ considerare l'operatore lineare L, dato dalla proiezione ortogonale su $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 t.c. 2x + y - z = 0\}$ Determinare autovettori ed autovalori di L.

5. * Sia V lo spazio vettoriale di polinomi su $\mathbb{R}$ con il prodotto scalare definito da $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Sia D l'operatore derivata su V. Cercare l'aggiunto di D.
   (Suggerimento: siete sicuri che esiste?)