GE2 - Tutorato III - Lunedì 14 ottobre 2002

1. Usando l'algoritmo di Lagrange diagonalizzare (trovando una base diagonalizzante) le seguenti forme quadratiche $q(X,Y,Z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

   (a) $2XY - 2XZ + 4YZ$

   (b) $X^2 + Z^2 - 2XY - 2XZ + 2YZ$

2. Come nell'esercizio precedente usando, però, l'algoritmo del "completamento del quadrato".

   (a) $X^2 - XZ + Y^2$

   (b) $XY + YZ$

3. Come nell'esercizio precedente usando, però, il metodo di Gauss-Jordan simmetrico.

   (a) $XY + Y^2 + 4XZ + Z^2$

   (b) $2X^2 - 8XY + Y^2 - 16XZ + 14YZ + 5Z^2$

4. Usando il metodo di Gram-Schmidt trovare una base $b-$ortonormale per le forme bilineari polari delle seguenti forme quadratiche:$q(X,Y,Z)$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Prima assicurarsi, usando il teorema di Jacobi-Sylvester, che esse sono definite positive.

   (a) $2X^2 + 2XY + 2Y^2 - 2XZ + Z^2$

   (b) $2X^2 + 2XY + Y^2 + 2Z^2$

5. (*)

   (a) Applicare il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt all'insieme infinito di vettori di $\mathbb{R}^3$ $(1, n, n^2) \forall n \in \mathbb{N}$

   (b) Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt si costruisca una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ (con prodotto scalare standard) il cui primo vettore sia un multiplo di $(1, -1, 1, 1)$

   (c) Si consideri lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$ con prodotto scalare standard. Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operatore lineare definito da una matrice simmetrica. Dimostrare che comunque presi due autovettori con autovalori distinti essi sono ortogonali.

   (d) Sia V uno spazio vettoriale euclideo con prodotto scalare standard, e v, w due suoi vettori. Dimostrare che se $|v| = |w|$ allora $(v + w) \perp (v - w)$. Interpretare questa formula geometricamente.