DIDATTICA GUIDATA GE2: FORME BILINEARI E FORME QUADRATICHE

Esercizio 1. (i) Si considerino le forma bilineari simmetriche

$$b : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$$

aventi tra i propri vettori isotropi i vettori della base canonica ed il vettore $\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3$ e se ne scrivano le matrici associate (rispetto alla base canonica).
(ii) Tra le precedenti forme se ne determini una non nulla per la quale i vettori $(1, 1, 0)$ e $(1, -1, 1)$ siano ortogonali e se ne determini rango e segnatura.

Soluzione. La matrice è

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

con la condizione $a + b + c = 0$. La condizione di ortogonalitá tra i due vettori $(1, 1, 0)$ e $(1, -1, , 1)$ indicati è data da

$$b + c = 0$$

Ponendo $t = b = -c$ la forma quadratica associata è

$$t(x_1x_3 - x_2x_3)$$

con $t \neq 0$. Il rango è due.

Esercizio 2. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calcolare la matrice $B = (A^t)A$;
2. Scrivere la forma bilineare simmetrica

$$b : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R},$$

avente come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice B;
3. si verifichi se b è negativa semidefinita oppure positiva semidefinita oppure indefinita.
4. Si consideri il vettore

$$\mathbf{v}_\lambda = (1 - \lambda, 2 - \lambda, \lambda)$$

ed il sottospazio F_λ dei vettori $\mathbf{x}$ tali che $b(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = 0$.
Al variare del parametro reale λ si calcoli la dimensione della intersezione

$$F_\lambda \cap W,$$

dove W è il sottospazio avente come base i vettori

$$\mathbf{w}_1 = (1, -1, 0), \mathbf{w}_2 = (0, 0, 1).$$

Soluzione. La matrice richiesta è la seguente:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Per rispondere alla terza domanda basta determinare una base diagonalizzante per b, ovvero della forma quadratica q associata a b. Oppure si può osservare che, essendo A antisimmetrica (ovvero $A = -A^t$), si ha la proprietá seguente: se la colonna $(a, b, c)^t$ è il prodotto di A per la colonna $(x, y, z)^t$, ovvero $(a, b, c)^t = A(x, y, z)^t$, allora $(A(x, y, z)^t)^t = (x, y, z)^t A = (a, b, c)$. Posto $\mathbf{v} = (x, y, z)$ si ha allora che $b(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = a^2 + b^2 + c^2 \geq 0$. Quindi b è semidefinita positiva.

Un vettore $t_1\mathbf{w}_1 + t_2\mathbf{w}_2$ appartenente a W, ($t_1, t_2 \in \mathbf{R}$) appartiene $F_\lambda \cap W$ se e solo se t_1, t_2 soddisfano alla equazione seguente

$$t_1 b(\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_\lambda) + t_2 b(\mathbf{w}_2, \mathbf{v}_\lambda) = 0.$$

I coefficienti di questa equazione variano al variare di λ. Se i due coefficienti non sono entrambi zero allora le soluzioni della equazione sono ∞^1 e quindi $\dim F_\lambda \cap W = 1$. Ció avviene per $\lambda \neq 1$. Per $\lambda = 1$ entrambi i cefficienti sono nulli e quindi $F_1 = W$ e la dimensione è due.