UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Seconda prova di esonero - a.a. 2002-2003

*Cognome*____________________ *Nome*__________________________

*Numero di matricola*____________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri nè appunti.

Valutazione

1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Seconda prova di esonero - a.a. 2002-2003

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $F : V \to V$ un'applicazione lineare.

(a) Si definiscano le nozioni di autovalore, autovettore ed diagonalizzabilità di F;

(b) Si enunci il risultato che da condizioni necessarie e sufficenti per la diagonalizzabilità di F;

(c) si dimostri tale risultato.

2. In uno spazio affine di dimensione 3 sia O, e_1, e_2, e_3, un riferimento affine. Sia $A(0, 0, 2)$ un punto e si considerino le due rette di equazioni cartesiane:

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} 3X - Y - 1 = 0 \\ -3X - 2Y + 7 = 0 \end{cases}, \mathcal{R}_2 : \begin{cases} 3X - 4Y - 11 = 0 \\ X - 4Z - 1 = 0 \end{cases}.$$

(a) Esiste un piano che contiene tutte e due le rette?

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano affine p contenente $\mathcal{R}_1$ e parallelo a $\mathcal{R}_2$;

(c) Determinare tutti i punti $P \in p$ tali che la retta $\overline{PA}$ è incidente $\mathcal{R}_2$, ma non è incidente $\mathcal{R}_1$.

3. Siano U, V e W tre spazi vettoriali reali e siano $G : U \to V,\ F : V \to W$ due applicazioni lineari.

(a) Dimostrare che $G(N(F \circ G)) \subseteq N(F)$;

(b) se ora U è un sottospazio di V e G è l'inclusione di U in V, dimostrare che $N(F_{|U}) = N(F) \cap U$;

(c) trovare un esempio per il quale non vale l'uguaglianza in (a).

4. Sia a un numero reale e $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$F(E_3) = E_3, F(E_4) = aE_4, F(E_1 - E_3 - E_4) = E_1, F(E_2 - E_4) = aE_2,$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una matrice di F;

(b) trovare basi per gli autospazi di F;

(c) determinare i valori di a per i quali F è diagonalizzabile.

5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 1$, $F : V \to V$ un'applicazione lineare, $A \in M_n$ una matrice. Poniamo $r =$ rango di A, $p = \dim \mathrm{Im}(F)$.

(a) Dimostrare che, se $r \neq p$, allora non esiste una base $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ tale che A è la matrice di F nella base e;

(b) Dimostrare che, per ogni F fissata, esistono delle matrici $A \in M_n$ tali che $r = p$ ma non esiste una base $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ in cui A è la matrice di F.

SOLUZIONI

1. (a) [Sernesi] Definizioni 13.4 e 13.3; (b) e (c) Teorema 13.13. ■

2. (a) Le rette $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ sono complanari se e solo se [Sernesi, Proposizione 10.4]

$$0 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 0 & 7 \\ 3 & -4 & 0 & -11 \\ 1 & 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 576$$

quindi non esiste un piano che contiene tutte e due le rette. (b) Per [Sernesi, 10.11] si vede che $\mathcal{R}_1$ passa per il punto $Q_1(1,2,0)$ ed è paralella al vettore $v_1(0,0,1)$, mentre $\mathcal{R}_2$ passa per il punto $Q_2(1,-2,0)$ ed è paralella al vettore $v_2(4,3,1)$. Il piano p sarà dunque il piano per Q_1 con giacitura $< v_1, v_2 >$. Quindi, per [Sernesi, 10.3], l'equazione di p è

$$\begin{vmatrix} X-1 & Y-2 & Z \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3X - 4Y + 5 = 0.$$

(c) Posto $X = 4u, Z = v$, un punto $P \in p$ avrà coordinate $P(4u, 3u + \frac{5}{4}, v)$, da cui la retta $\overline{PA}$ è parallela al vettore $\vec{AP}(4u, 3u + \frac{5}{4}, v-2)$. Osserviamo ora che il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4u & 3u + \frac{5}{4} & v-2 \end{pmatrix}$$

è sempre due, quindi, non essendo $\overline{PA}$ parallela ad $\mathcal{R}_1$, si ha che $\overline{PA}$ non è incidente $\mathcal{R}_1$ se e solo se non sono complanari, cioè se e solo se

$$0 \neq \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4u & 3u + \frac{5}{4} & v-2 \end{vmatrix} = -5u + \frac{5}{4}$$

quindi se e solo se $u \neq \frac{1}{4}$. Infine $\overline{PA}$ ed $\mathcal{R}_2$ sono complanari se e solo se

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4u & 3u + \frac{5}{4} & v-2 \end{vmatrix} = 11v - 11u - \frac{133}{4}$$

quindi se e solo se $v = u + \frac{133}{4}$. Dato che, per tale valore di v, il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4u & 3u + \frac{5}{4} & v-2 \end{pmatrix}$$

è sempre due, si ha che $\overline{PA}$ non è parallela ad $\mathcal{R}_2$, quindi $\overline{PA}$ è incidente $\mathcal{R}_2$ se e solo se sono complanari. Ne consegue che i punti P richiesti sono tutti quelli di coordinate $P(4u, 3u + \frac{5}{4}, u + \frac{133}{4})$, con $u \neq \frac{1}{4}$. ■

3. (a) Sia $u \in N(F \circ G)$, allora $F(G(u)) = 0$, dunque $G(u) \in N(F)$. Quindi $G(N(F \circ G)) \subset N(F)$. (b) Sia $v \in V$. Si ha $v \in N(F_{|U})$ se e solo se $F_{|U}(v) = 0$. Dato che $F_{|U}$ è definita su U come $F_{|U}(u) = F(u)$, si ha che $F_{|U}(v) = 0$ se e solo se $v \in U$ e $F(v) = 0$, cioè $v \in N(F) \cap U$. (c) Siano $F = G = 0, V \neq \{0\}$. Allora $G(N(F \circ G)) = \{0\}$, mentre $N(F) = V$. ■

4. (a) Si ha

$$F(E_1) = E_1 + F(E_3) + F(E_4) = E_1 + E_3 + aE_4, \;\; F(E_2) = aE_2 + F(E_4) = aE_2 + aE_4$$

quindi la matrice di F nella base canonica è

$$M_E(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & a & 0 & a \end{pmatrix}.$$

(b) e (c) Il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-T & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-T & 0 \\ a & a & 0 & a-T \end{vmatrix} = (1-T)^2(a-T)^2$$

dunque, se $a \neq 1$, F ha due autovalori $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = a$, entrambi di molteplicità algebrica 2, mentre, se $a = 1$, F ha un solo autovalore $\lambda_1 = 1$, di molteplicità algebrica 4.

Studiamo l'autospazio $V_1(F)$: esso è dato, nella base canonica, dalle soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè il sistema $\begin{cases} x = 0 \\ (a-1)y = 0 \\ ay + (a-1)w = 0 \end{cases}$. Ora, se $a \neq 1$, si ha $x = y = w = 0$ da cui una base di $V_1(F)$ è $\{E_3\}$. Se invece $a = 1$ allora si ha $x = y = 0$ da cui una base di $V_1(F)$ è $\{E_3, E_4\}$. In particolare osserviamo che $\dim V_1(F)$ è sempre minore della molteplicità algebrica di $\lambda_1 = 1$, quindi per nessun valore di a, F è diagonalizzabile. Ora, per $a \neq 1$, studiamo l'autospazio $V_a(F)$: esso è dato, nella base canonica, dalle soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-a & 0 \\ a & a & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè il sistema $\begin{cases} (1-a)x = 0 \\ x + (1-a)z = 0 \\ ax + ay = 0 \end{cases}$, quindi $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ ay = 0 \end{cases}$. Se $a \neq 0$, si ha $x = y = z = 0$ da cui una base di $V_a(F)$ è $\{E_4\}$, mentre se $a = 0$ allora si ha $x = z = 0$ da cui una base di $V_a(F)$ è $\{E_2, E_4\}$. ■

5. (a) Se esiste una base e tale che $A = M_e(F)$ allora, come è noto,

$$r = r(A) = r(M_e(F)) = r(F) = \dim Im(F) = p,$$

contraddizione. Dunque una tale base e non esiste se $r \neq p$. (b) Se F non è diagonalizzabile basta scegliere una qualsiasi matrice A diagonale di rango p (per esempio una matrice $A = (a_{ij})$ diagonale con $a_{ii} = 1, 1 \leq i \leq p, a_{ii} = 0, p+1 \leq i \leq n$). Se fosse $A = M_e(F)$ allora F sarebbe diagonalizzabile. Supponiamo invece che F è diagonalizzabile. Dunque esiste una base $f = \{f_1, \ldots, f_n\}$ tale che $M_f(F)$ è diagonale, diciamo $M_f(F) = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Sia $A = diag(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ un'altra matrice diagonale, diversa da $M_f(F)$ ma dello stesso rango p. Se esistesse una base e tale che $A = M_e(F)$ allora gli autovalori di A sarebbero gli autovalori di F, quindi $\lambda_i = \mu_i, 1 \leq i \leq n$, cioè avremmo la contraddizione $A = M_f(F)$. ■