UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prova scritta del 17-6-2003 - a.a. 2002-2003

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e W un suo sottospazio.

(a) Si enunci il risultato che relaziona le dimensioni di V e di W;

(b) si dimostri tale risultato.

2. Determinare per quali valori $h \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + hX_2 + hX_4 = 0 \\ hX_1 + X_3 + X_4 = 1 \\ -X_1 + 2X_3 - X_4 = 0 \\ hX_1 + X_2 + hX_3 = 1 \end{cases}$$

e calcolarne esplicitamente le soluzioni.

3. Sia a un numero reale e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si determinino i valori di a per i quali A si può esprimere come prodotto di matrici elementari e si scriva esplicitamente tale prodotto.

4. Sia k un numero reale e sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Siano

$$v_1 = e_1 - e_4, v_2 = e_2 - e_3, v_3 = e_1 + ke_2, v_4 = ke_2 + e_3.$$

(a) Siano $U =< v_1, v_2 >, W =< v_1, v_3, v_4 >$ i sottospazi generati. Si calcoli la dimensione di U e di W;

(b) si determini se esistono valori di k tali che $U \subset W$;

(c) si determini se esistono valori di k tali che $dim U \cap W = 2$.

5. (a) Si definiscano le nozioni di spazio e sottospazio affine;

(b) si enunci il risultato che relaziona l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare con i sottospazi affini;

(c) si dimostri tale risultato.

6. Sia a un numero reale e sia A uno spazio affine di dimensione 3 su uno spazio vettoriale reale V e sia O, e_1, e_2, e_3 un riferimento affine. Si considerino i tre piani di equazione:

$$\pi_1 : 7X_1 + 4X_2 + 7X_3 + 1 = 0; \pi_2 : 2X_1 - X_2 - X_3 + 2 = 0; \pi_3 : X_1 + 2X_2 + 3X_3 = a.$$

(a) si determinino i valori di a per i quali i tre piani appartengono allo stesso fascio;

(b) per tali valori di a si scrivano le equazioni della retta comune in forma parametrica;

(c) si determinino i valori di a per i quali esiste un piano parallelo a π_3 ma che non interseca $\pi_1 \cap \pi_2$.

7. Siano V e W due spazi vettoriali reali di dimensione finita, $F : V \to W$ un'applicazione lineare. Supponiamo che $\dim W \geq \dim N(F)$.

(a) Si determini un'applicazione lineare $G : V \to W$ tale che $N(F) \cap N(G) = \{0\}$;

(b) Si determini un'applicazione lineare $G : V \to W$ tale che $N(F) \oplus N(G) = V$;

(c) Si determini un'applicazione lineare $G : V \to W$ tale che $V/N(F) \cong V/N(G)$.

8. Sia a un numero reale e sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ la seguente matrice: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A;

(b) trovare basi per gli autospazi di A;

(c) determinare i valori di a per i quali A è diagonalizzabile.