Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2002/2003

FM3 - Meccanica lagrangiana e hamiltoniana

Prima prova di esonero (16-04-03)

CORREZIONE

Esercizio 2.

2.1. Lagrangiana. Scegliamo un sistema di coordinate in cui si abbia

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_{P_1} = (x_1, y_1) = (x_1, x_1^2), \\ \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_{P_2} = (x_2, y_2) = (x_2, 1), \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = (\dot{x}_1, \dot{y}_1) = (\dot{x}_1, 2x_1\dot{x}_1), \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = (\dot{x}_2, \dot{y}_2) = (\dot{x}_2, 0), \end{cases}$$

L'energia cinetica del sistema è quindi data da

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\dot{x}_1^2\left(1 + 4x_1^2\right) + \frac{1}{2}\dot{x}_2^2, \end{aligned}$$

mentre l'energia potenziale è data da

$$\begin{aligned} U &= mgy_1 + mgy_2 + \frac{1}{2}k\left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right) \\ &= gx_1^2 + \frac{1}{2}k\left(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^4 - 2x_1^2\right) + \text{cost.} \\ &= gx_1^2 + \frac{1}{2}k\left(x_2^2 + x_1^4 - 2x_1x_2 - x_1^2\right) + \text{cost.}, \end{aligned}$$

e i termini costanti si possono trascurare, così che risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \equiv \mathcal{L} &= T(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) - U(x_1, x_2), \\ T(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \equiv T &= \frac{1}{2}\dot{x}_1^2\left(1 + 4x_1^2\right) + \frac{1}{2}\dot{x}_2^2, \\ U(x_1, x_2) \equiv U &= gx_1^2 + \frac{1}{2}k\left(x_2^2 + x_1^4 - 2x_1x_2 - x_1^2\right). \end{aligned}$$

2.2. Equazioni di Eulero-Lagrange. Si ha

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1 + 4x_1^2\right)\dot{x}_1\right] = 8x_1\dot{x}_1^2 + \left(1 + 4x_1^2\right)\ddot{x}_1, \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{x}_2 = \ddot{x}_1, \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 4x_1\dot{x}_1^2 - 2gx_1 + k\left(x_1 + x_2 - 2x_1^3\right),$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = k\left(x_1 - x_2\right),$$

così che le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\left(1 + 4x_1^2\right)\ddot{x}_1 = -4x_1\dot{x}_1^2 - 2gx_1 + k\left(x_1 + x_2 - 2x_1^3\right),$$
$$\ddot{x}_2 = k\left(x_1 - x_2\right).$$

2.3. Configurazioni d'equilibrio. Per determinare le configurazioni d'equilibrio dobbiamo trovare i punti stazionari dell'energia potenziale

$$U \equiv U(x_1, x_2) = gx_1^2 + \frac{1}{2}k\left(x_2^2 + x_1^4 - 2x_1x_2 - x_1^2\right).$$

Si ha

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 2gx_1 + k\left(2x_1^3 - x_2 - x_1\right),$$
$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = k\left(x_2 - x_1\right),$$

Imponendo che le derivate prime siano nulle si trova, dalla seconda equazione,

$$x_1 = x_2,$$

che, introdotta nella prima equazione, dà

$$2gx_1 + k\left(x_1^3 - x_2 - x_1\right) = 2\left((g - k) + kx_1^2\right)x_1 = 0,$$

che richiede

$$x_1 = 0,$$

oppure

$$x_1^2 = \frac{k - g}{k},$$

che può essere soddisfatta solo se $k \geq g$, e fornisce in tal caso le due soluzioni

$$x_1 = \pm x_0, \qquad x_0 = \sqrt{\frac{k - g}{k}}.$$

Quindi, se $k < g$, si ha una sola posizione d'equilibrio

$$(Q_1) \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = 0,$$

mentre se $k > g$, si hanno tre posizioni d'equilibrio

$$\begin{aligned}
&(Q_1) \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = 0,\\
&(Q_2) \qquad x_1 = x_0, \qquad x_2 = x_0,\\
&(Q_3) \qquad x_1 = -x_0, \qquad x_2 = -x_0.
\end{aligned}$$

Nel caso $k = g$ le due configurazioni (Q_2) e (Q_3) coincidono e si riducono a (Q_1).

2.4. Stabilità delle configurazioni d'equilibrio. Per discutere la stabilità si considera la matrice hessiana $\mathcal{H}(x_1, x_2)$. Tenendo conto che si ha

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} = 2g + 6kx_1^2 - k,\\
&\frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} = -k,\\
&\frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} = k,
\end{aligned}$$

si ottiene

$$\mathcal{H}(0,0) = \begin{pmatrix} 2g & -k \\ -k & k \end{pmatrix},$$

così che

$$\det \mathcal{H}(0,0) = 2gk - 2k^2 = 2\,(g-k)\,k,$$

mentre

$$\mathcal{H}(\pm x_0, \pm x_0) = \begin{pmatrix} 2g + 6kx_0^2 - k & -k \\ -k & k \end{pmatrix},$$

così che

$$\det \mathcal{H}(\pm x_0, \pm x_0) = (2g + 6\,(k-g) - k)\,k - k^2 = 4\,(k-g)\,k.$$

Tenendo conto che la traccia delle matrici è positiva è sufficiente lo studio del determinante per stabilire (ove possibile) se i punti stazionari sono punti di minimo o di massimo.

Si vede quindi che per $g > k$ la configurazione (Q_1) costituisce un punto di minimo per l'energia potenziale, mentre per $g < k$ la configurazione (Q_1) è un punto di massimo e le due nuove configurazioni (Q_2) e (Q_3) sono punti di minimo.

Quindi per $g > k$ la configurazione (Q_1) è l'unica posizione d'equilibrio e corrisponde a una posizione d'equilibrio stabile (come conseguenza del teorema di Dirichlet).

Al contrario se $g < k$, la posizione d'equilibrio (Q_1) diventa instabile (perché corrisponde a un punto di sella per l'energia potenziale), mentre le due posizioni d'equilibrio (Q_1) e (Q_3) sono stabili (di nuovo per il teorema di Dirichlet).

Resta infine da discutere il caso $g = k$. In tal caso l'analisi al secondo ordine non permette di concludere poiché si annulla il determinante della matrice hessiana (come già notato per tali valori dei parametri le tre posizioni d'equilibrio coincidono e si riducono pertanto a un'unica posizione d'equilibrio). È tuttavia sufficiente notare che l'energia potenziale tende all'infinito per $x_1^2 + x_2^2 \to \infty$: quindi, essendo l'energia potenziale una funzione continua, essa dovrà raggiungere il suo minimo in corrispondenza dell'unico punto stazionario che esiste, cioè (Q_1), e quindi anche in tal caso il punto (Q_1) costituisce un punto d'equilibrio stabile (di nuovo per il teorema di Dirichlet).

2.5. Forze vincolari. Per i valori dei parametri $2k = g = 1$ si ha $g > k$ e quindi esiste una sola configurazione d'equilibrio (stabile), come dimostrato al punto precedente, data da

$$(Q_1) \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = 0.$$

La forza vincolare che agisce sul punto P_1 si potrà ricavare dall'equazione

$$m\ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{f}_V^{(1)},$$

che, scritta per componenti (e tenuto conto che $m = 1$), diventa

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = f_x^{(1)} + f_{V,x}^{(1)}, \\ \ddot{y}_1 = f_y^{(1)} + f_{V,y}^{(1)}. \end{cases}$$

Dal principio di d'Alembert possiamo dedurre subito che deve essere

$$f_{V,x}^{(1)} = 0,$$

poiché la forza vincolare deve essere ortogonale alla superficie di vincolo e il profilo $y = x^2$ ha tangente orizzontale per $x = 0$. Basta quindi calcolare le componente $f_{V,y}^{(1)}$. Poiché il sistema si trova in una configurazione d'equilibrio si deve anche avere $\ddot{y}_1 = 0$, quindi è sufficiente calcolare $f_y^{(1)}$, da cui si può poi dedurre

$$f_{V,y}^{(1)} = -f_y^{(1)}.$$

Ricordiamo che, in coordinate cartesiane, l'energia potenziale è data da

$$U(x_1, y_1, x_2, y_2) = gy_1 + gy_2 + \frac{1}{2}k\left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right),$$

così che si ha

$$\begin{aligned} f_y^{(1)} &= -\frac{\partial U}{\partial y_1} = -g - k\,(y_1 - y_2) = -g - k\left(x_1^2 - 1\right) \\ &= -2k - k\left(x_1^2 - 1\right) = -k\,(2 + (0 - 1)) = -k, \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto delle coordinate della configurazione (Q_1) e del fatto che si ha $g = 2k = 1$.

Quindi, in conclusione, risulta

$$\mathbf{f}_V^{(1)} = (0, k) = (0, 1/2),$$

i.e. la forza vincolare che agisce sul punto P_1 nella configurazione d'equilibrio (Q_1) ha componente orizzontale nulla, mentre la componente verticale è diretta verso l'alto e bilancia la risultante della forza gravitazionale e della forza elastica.

<u>ESERCIZIO 4.</u>

4.1. Frequenze proprie. Le frequenze proprie si trovano risolvendo l'equazione caratteristica

$$\det\left(B - \lambda A\right),$$

dove

$$B - \lambda A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2\lambda & 1 - \lambda \\ 1 - \lambda & 1 - \lambda \end{pmatrix},$$

così che si ottiene

$$\begin{aligned} \det\left(B - \lambda A\right) &= \left(3 - 2\lambda\right)\left(1 - \lambda\right) - \left(1 - \lambda\right)\left(1 - \lambda\right) = \left(1 - \lambda\right)\left(3 - 2\lambda - 1 + \lambda\right) \\ &= \left(1 - \lambda\right)\left(2 - \lambda\right). \end{aligned}$$

Quindi le frequenze proprie sono

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = 1, \qquad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{2}.$$

4.2. Piccole oscillazioni. Esiste quindi un cambiamento di coordinate $q \to Q$ tale che, nelle nuove coordinate Q, si ha

$$\ddot{Q}_1 = -Q_1, \qquad \ddot{Q}_2 = -2Q_2.$$

In tali coordinate si ha quindi

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= Q_1(0)\cos t + \dot{Q}_1(0)\sin t, \\ Q_2(t) &= Q_2(0)\cos\sqrt{2}t + \frac{\dot{Q}_1(0)}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t, \end{aligned}$$

dove i dati iniziali sono legati ai dati iniziali nelle coordinate originali dalla relazione

$$\begin{pmatrix} Q_1(0) \\ Q_2(0) \end{pmatrix} = \mathcal{C}^{-1}\begin{pmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \dot{Q}_1(0) \\ \dot{Q}_2(0) \end{pmatrix} = \mathcal{C}^{-1}\begin{pmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \end{pmatrix},$$

dove $\mathcal{C}^{-1}$ è l'inversa della matrice

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{pmatrix}$$

dove i vettori $\xi_1 = (\xi_{11}, \xi_{12})$ e $\xi_2 = (\xi_{21}, \xi_{22})$ sono soluzioni delle equazioni

$$(B - \lambda_i A)\,\xi_i = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Quindi, per $i = 1$, otteniamo

$$B - \lambda_1 A = B - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{12} \end{pmatrix} = 0,$$

che ammette soluzione $\xi_1 = (0, 1)$, mentre per $i = 2$, otteniamo

$$B - \lambda_2 A = B - 2A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{21} \\ \xi_{22} \end{pmatrix} = 0,$$

che ammette soluzione $\xi_2 = (-1, 1)$. Quindi

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

In conclusione si ha

$$\begin{aligned} Q_1(0) &= q_1(0) + q_2(0), & Q_2(0) &= -q_1(0), \\ \dot{Q}_1(0) &= \dot{q}_1(0) + \dot{q}_2(0), & \dot{Q}_2(0) &= -\dot{q}_1(0), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} q_1(t) &= -Q_2(t), \\ q_2(t) &= Q_1(t) + Q_2(t), \end{aligned}$$

così che la soluzione è data da

$$\begin{aligned} q_1(t) &= q_1(0) \cos \sqrt{2} t + \frac{\dot{q}_1(0)}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2} t, \\ q_2(t) &= (q_1(0) + q_2(0)) \cos t + (\dot{q}_1(0) + \dot{q}_2(0)) \sin t \\ &\quad - q_1(0) \cos \sqrt{2} t - \frac{\dot{q}_1(0)}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2} t, \end{aligned}$$

che descrive le piccole oscillazioni.