Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2002/2003

FM3 - Meccanica lagrangiana e hamiltoniana

PRIMA PROVA DI ESONERO (16-04-03)

ESERCIZIO 1. Definire le equazioni di Eulero-Lagrange e dimostrare che le corrispondenti soluzioni rendono stazionario un opportuno funzionale d'azione.

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema lagrangiano costituito da due punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa $m = 1$, vincolati a muoversi su un piano verticale su due profili di equazione, rispettivamente, $y = x^2$ e $y = 1$. I due punti sono inoltre collegati da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla.
(2.1) Si scriva la lagrangiana del sistema.
(2.2) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
(2.3) Si determinino le configurazioni d'equilibrio.
(2.4) Se ne discuta la stabilità.
(2.5) Si determini la forza vincolare che agisce sul punto P_1 in corrispondenza di una posizione d'equilibrio stabile (se esiste), per i seguenti valori dei parametri: $2k = g = 1$ (dove g è l'accelerazione di gravità).

ESERCIZIO 3. Enunciare e dimostrare il teorema di Routh.

ESERCIZIO 4. Si consideri un sistema meccanico che, nell'approssimazione delle piccole oscillazioni, è descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\langle \dot{q}, A\dot{q} \rangle - \frac{1}{2}\langle q, Bq \rangle,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4.1) Determinare le frequenze proprie.
(4.2) Risolvere esplicitamente le equazioni che descrivono le piccole oscillazioni.