II prova di esonero di FM2 a.a. 2002/2003

1) Risolvere il seguente problema ai dati iniziali in un intervallo

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 \leq x \leq 1 \\ u(x,0) = sin^2(\pi x) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

2) Risolvere il seguente problema ai dati iniziali in un intervallo

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \dfrac{x(1-x^2)}{1+t^2} & 0 \leq x \leq 1 \\ u(x,0) = 2sin(2\pi x) + 4sin(4\pi x) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

3) Calcolare l'evoluzione della temperatura nell'origine di una sbarra infinita

con temperatura iniziale

$$\phi(x) = \begin{cases} |x| & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

e determinare il suo limite quando il tempo tende a $+\infty$.

4) Risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & (x,y) \in \Omega,\ \Omega = \{(x,y) |\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \\ u(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy & \text{con (x,y) tali che } x^2 + y^2 = 1 \\ u(x,y) = x^2 - y^2 - xy & \text{con (x,y) tali che } x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

5) Determinare, se esiste, una funzione $u(x,y)$ tale che

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & (x,y) \in \Omega,\ \Omega = \{(x,y)|\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leq 1\} \\ u(x,y) = xy & \text{con (x,y) tali che } \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ u(0,0) = 10 \end{cases}$$

6) Risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 2 & (x,y) \in \Omega,\ \Omega = \{(x,y)|\ x^2 + y^2 \leq 1\} \\ u(x,y) = y & \text{con (x,y) tali che } x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$