Tutorato di FM1

4 Aprile 2003

1. Dato il sistema planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = 2x(2x^2 - 3x + 1) \end{cases}$$

a) Mostrare che la funzione $H(x, y) = (y - x(1 - x))(y + x(1 - x))$ è una costante del moto.

b) Mostrare che esistono 2 punti di equilibrio instabile ed un punto di equilibrio stabile.

c) Mostrare che l' insieme

$$\partial A = \big\{(x, y) : y = -x^2 + x, 0 \le x \le 1\big\} \cup \big\{(x, y) : y = x^2 - x, 0 \le x \le 1\big\}$$

è invariante, dire quante orbite contiene e discutere il loro comportamento asintotico.

d) Dimostrare che l' insieme $A = \{(x, y) : x^2 - x < y < -x^2 + x, 0 < x < 1\}$ è invariante e che contiene solo orbite periodiche.

e) Verificare con il calcolo diretto che ogni soluzione su ∂A con dato iniziale sul semipiano inferiore tende asintoticamente a 0 per $t \to +\infty$ e a 1 per $t \to -\infty$ (suggerimento: ricondursi ad una sola variabile e risolvere l' equazione per separazione di variabili).

2. Dato il sistema planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(x - 1) \\ \dot{y} = -3x^2 + 2x - y^2 + 1 \end{cases}$$

a) Mostrare che la funzione $H(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(x - 1)$ è una costante del moto.

b) Studiare l' andamento qualitativo delle orbite e individuare l' insieme dei punti che danno luogo ad orbite periodiche.

c) Considerare il sistema planare ottenuto aggiungendo al campo vettoriale del sistema la funzione $G(x, y) = (-x, -y)$ e mostrare che il cerchio unitario è positivamente invariante per tale sistema.

3. Considerare il sistema unidimensionale

$$\ddot{x} = -x(x+1)(x-1)$$

a) Ricondurre il sistema ad un sistema bidimensionale e trovare una costante del moto.

b) Discutere l' andamento qualitativo delle orbite.

c) Stimare il periodo dell' orbita passante per il punto $(2, 0)$.