

ESERCIZIO 1. Definire l'esponenziale di un operatore lineare e discuterne le proprietà.

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali $x(0) = (1, 1)$. Se ne trovi la soluzione.

ESERCIZIO 3. Dato un sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$, con $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 , si discuta quali informazioni si possono trarre sulla stabilità di un eventuale punto d'equilibrio x_0 dallo studio del sistema linearizzato corrispondente.

ESERCIZIO 4. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^3 + 4y^3 - 1), \\ \dot{y} = -y(4x^3 + y^3 - 1). \end{cases}$$

(4.1) Verificare che la funzione

$$H(x, y) = xy(x^3 + y^3 - 1)$$

è una costante del moto.

(4.2) Determinare i punti d'equilibrio.

(4.3) Discuterne la stabilità.

(4.4) Studiare qualitativamente le traiettorie del sistema.