SCRITTO DI CP3 : 10-7-2002

E. Scoppola

Esercizio 1

Siano $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ variabili casuali indipendenti con X_n distribuita con densità di probabilità

$$p_n(x) = \frac{C_n}{x^2 \ln |x|} \mathbf{1}_{\{2 < |x| \leq 2 + n^\alpha\}} \tag{1}$$

con $\alpha \in (0, 1)$.

1) Determinare se le variabili X_n sono in $\mathcal{L}^1$, se la famiglia è limitata in $\mathcal{L}^1$ e se la famiglia è uniformemente integrabile.

2) Dimostrare che $M_n := X_1 + ... + X_n$ è una martingala.

3) M_n converge quasi sicuramente per $n \to \infty$?

4) Vale la legge forte dei grandi numeri per le variabili $X_1, X_2, ..., X_n, ...$?

Esercizio 2

Si consideri la particolare passeggiata aleatoria sulla retta che parte da 0 tale che ogni passo è dato da una variabile gaussiana indipendente di media 0 e varianza σ.

Calcolare, nel limite di grandi n, la probabilità di essere al tempo n fuori dall'intervallo $[-n\sigma, n\sigma]$.

Domanda

Enunciare il teorema di Sanov per la misura empirica e darne lo schema di dimostrazione.