2 ESONERO di CP1 A.A. 2002-2003

Esercizio 1

Su di una strada ci sono 4 semafori. Ognuno di questi é rosso, indipendentemente dagli altri, con probabilitá p. Sia X il numero di semafori superati da un'auto prima di fermarsi. Si chiede di calcolare la distribuzione e la media di X.

Soluzione Il codominio della variabile aleatoria X é l'insieme $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Sia $f(i)$ con $i \in A$ la distrubuzione di probabilitá di X . Si ha $f(0) = p$, $f(1) = p(1-p)$, $f(2) = p(1-p)^2$, $f(3) = p(1-p)^3$, $f(4) = (1-p)^4$. La media

$$E(X) = p(1-p) + 2p(1-p)^2 + 3p(1-p)^3 + 4(1-p)^4$$

Esercizio 2

Un congegno elettronico ha probabilitá $p = 5 \times 10^{-3}$ di non funzionare. Scegliamo in modo casuale un campione di 10^4 congegni. Si chiede di stimare, utilizzando il teorema del limite centrale, la probabilitá che non ci siano piú di 70 congegni non funzionanti.

Soluzione Si associ ai congegni elettronici una successione di variabile aleatorie X_i per $i = 1, .., 10^4$, indipendenti, $X_i \in \{0, 1\}$, $X_i = 0$ con probabilitá $(1-p)$ (funzionante) e $X_i = 1$ con probabilitá p (non funzionante). Si ponga $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Si ha che

$$E[S_n] = np = 50$$

$$\sigma^2 = E[S_n^2] - (np)^2 = np(1-p) = 5 \times 995 \times 10^{-2}$$

Si stima quindi

$$\mathbb{P}\left\{\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{70 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\} \leq \int_{-\infty}^{\frac{70-np}{\sqrt{np(1-p)}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2} dx$$
$$= \Phi(\frac{70 - np}{\sqrt{np(1-p)}})$$

Esercizio 3

Siano X_i, $i \geq 1$, variabili aleatorie indipendenti con densitá di probabilitá esponenziale di parametro λ. Ognuna di esse rappresenta il tempo di vita di un elemento radioattivo. Si consideri la variabile aleatoria

$$V_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i > t\}}, \qquad t > 0.$$

Essa rappresenta la proporzione di elementi radioattivi ancora in vita al tempo t.

(1) Si calcoli la vita media τ del generico elemento radioattivo.

(2) Si provi applicando la legge debole dei grandi numeri che esiste una costante v_t tale che
$$\lim_{n\to\infty} \text{Prob}\{|V_n(t) - v_t| < \epsilon\} = 1$$

(3) Si calcoli, in funzione di τ il valore di t per il quale risulti $v_t = \frac{1}{2}$.

Soluzione Si calcola facilmente $\tau = E[X_i] = \frac{1}{\lambda}$ per ogni $i \geq 1$. Si ha inoltre che $v_t = E[\mathbb{1}_{\{X_i > t\}}] = P\{X_i > t\} = e^{-\lambda t}$. Per la legge deboli dei grandi numeri, per ogni $a > 0$ si ottiene

$$\text{Prob}\left\{|V_n(t) - v_t| \geq a\right\} \leq \frac{E[|V_n(t) - v_t|^2]}{a^2}$$

Poiché

$$E[|V_n(t) - v_t|^2] = \frac{1}{n} e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})$$

per $n \to \infty$ si ottiene (2). Poiché $\lambda = \frac{1}{\tau}$ e $v_t = e^{-\lambda t}$ si ottiene che $v_t = e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{2}$. Quindi $t = \tau \log 2$.

Esercizio 4

Si considerino due variabili aleatorie indipendenti X e Y uniformi su $(0,1)$. Si consideri la variabile aleatoria $Z = \min\{X, Y\}$.

(1) Si determini la funzione di distribuzione di Z.
(2) Si determini la funzione densitá di probabilitá di Z.
(3) Si determini la media di Z.
(4) Si determini la funzione densitá di probabilitá di $T = -\log X$.
(5) Si determini la media di XY.

Soluzione La funzione di distribuzione di Z, per $z \in (0,1)$ é

$$\begin{aligned} F(z) &= \text{Prob}\{Z \leq z\} = 1 - \text{Prob}\{Z > z\} = 1 - \text{Prob}\{X > z, Y > z\} \\ &= 1 - \text{Prob}\{X > z\}\text{Prob}\{Y > z\} = 1 - [1 - \int_0^z dx]^2 = 1 - [1 - z]^2 \end{aligned}$$

La funzione densitá di probabilitá di Z é

$$f(z) = F'(z) = 2[1 - z]$$

La media di Z é

$$E[Z] = 2\int_0^1 z(1 - z)dz = \frac{1}{3}$$

La funzione di distribuzione di $T = -\log X$ é

$$G(y) = \text{Prob}\{T \leq y\} = \text{Prob}\{X \geq e^{-y}\} = 1 - \text{Prob}\{X < e^{-y}\} = 1 - \int_0^{e^{-y}} dx = 1 - e^{-y}$$

La funzione densitá di probabilitá di $T = -\log X$ é quindi

$$g(y) = G'(y) = e^{-y}$$

La media di XY poiché sono indipendenti é data da

$$E[XY] = E[X]E[Y] = \frac{1}{4}$$