

La formula di Stirling dimostrata in modo elementare

La formula di Stirling é una stima del rapporto $\frac{n!e^n}{n^n}$, precisamente si può dimostare che

$$n! = n^n e^{-n} (L\sqrt{n} + \alpha_n)$$

dove $\alpha_n \rightarrow 0^+$ per $n \rightarrow +\infty$ e L é una costante positiva. Con metodi non compresi nel corso di Analisi I modulo, si trova che $L = \sqrt{2\pi}$.

Lemma 1

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \quad (0.1)$$

Dimostrazione Dimostriamo la disuguaglianza di destra, quella di sinistra si prova in modo del tutto analogo. Sia $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ $x \in \mathbb{R}^+$. É immediato dedurre che:

$$e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 1 < \left(x + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad (0.2)$$

dove abbiamo applicato il logaritmo ad entrambi i membri. Quindi dimostreremo che $f(x) > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$ e cosí avremo provato la (0.1) con x al posto di n . Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

e derivando la f (che é derivabile in tutto il suo insieme di definizione) abbiamo:

$$f'(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x + \frac{1}{2}}{x(x+1)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0. \quad (0.3)$$

Andiamo a calcolare la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2(x+1)^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \quad (0.4)$$

La (0.4) implica che $f'(x)$ é sempre strettamente crescente e da (0.3) sappiamo che tende a 0 per $x \rightarrow +\infty$. Quindi $f'(x)$ é ovviamente sempre minore del suo estremo superiore, che in questo caso coincide con il limite per $x \rightarrow +\infty$, quindi possiamo affermare che $f'(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}^+$. Ciò implica che f é una funzione strettamente decrescente; inoltre tende asintoticamente ad 1, e non avendo minimi relativi, non può far altro che mantenersi sempre *al di sopra* della retta $y = 1$. Questo conclude la dimostrazione di (0.2).

Lemma 2

$$n! = n^n e^{-n} (L\sqrt{n} + \alpha_n) \text{ con } \alpha_n \rightarrow 0^+.$$

Dimostrazione Definiamo le seguenti due successioni numeriche:

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^n(n+1)^{\frac{1}{2}}}, \quad b_n = \frac{n!e^n}{n^n(n)^{\frac{1}{2}}}$$

ovviamente si ha $a_n < b_n$. Inoltre a_n é strettamente crescente, infatti:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}(n+2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{n!e^n}{n^n(n+1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{e n^n(n+1)^{\frac{1}{2}}}{(n+1)^n(n+2)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= a_n \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}} > a_n \end{aligned}$$

l'ultima disuguaglianza deriva dal Lemma 1.

Analogamente si dimostra che b_n é strettamente decrescente:

$$b_{n+1} = b_n \cdot \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}} < b_n,$$

di nuovo l'ultima disuguaglianza é conseguenza del Lemma 1.

A questo punto abbiamo che

$$\frac{e}{\sqrt{2}} = a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n < b_n < \dots < b_1 = e, \quad (0.5)$$

essendo a_n crescente e limitata superiormente, esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n := L_1$, ed essendo b_n decrescente e limitata inferiormente, esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n := L_2$. D'altra parte si ha che

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^n(n)^{\frac{1}{2}}} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{(n+1)^{\frac{1}{2}}} \rightarrow L_2 \cdot 1 \text{ per } n \rightarrow \infty,$$

quindi $L_1 = L_2 := L$. Dalla relazione tra le due successioni deduciamo che (*) $a_n < L < b_n$, in particolare esiste una successione $\varepsilon_n \rightarrow 0$ tale che

$$\frac{n!e^n}{n^n(n)^{\frac{1}{2}}} = (L + \varepsilon_n) \Leftrightarrow \frac{n!e^n}{n^n} = L\sqrt{n} + \varepsilon_n\sqrt{n}$$

$$\Leftrightarrow n! = n^n e^{-n} (L\sqrt{n} + \varepsilon_n \sqrt{n}) = n^n e^{-n} (L\sqrt{n} + \alpha_n).$$

Infine abbiamo anche un'informazione sia sul fatto che α_n tende a zero, sia sulla velocità con cui tende a zero. Infatti da (*) deduciamo che

$$\frac{n!e^n}{n^n(n+1)^{\frac{1}{2}}} < L < \frac{n!e^n}{n^n(n)^{\frac{1}{2}}} = L + \varepsilon_n \Rightarrow$$

$$L\sqrt{n} < \frac{n!e^n}{n^n} < L\sqrt{n+1}.$$

Quindi

$$0 < \varepsilon_n \sqrt{n} = \frac{n!e^n}{n^n} - L\sqrt{n} < L\sqrt{n+1} - L\sqrt{n} = L \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{L}{2\sqrt{n}}.$$

□

Esercizio

Consideriamo la funzione

$$F(x) = (x + \alpha) \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \leq \alpha < 1.$$

Studiare il grafico della F al variare del parametro α , in particolare osservare cosa succede per $\alpha < \frac{1}{2}$ e $\alpha \geq \frac{1}{2}$.