PRIMO ESONERO DI CAM - SOLUZIONI
14 aprile 2003

Esercizio 1.

$I_E = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

Per $x > 0$ studio $f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$.

$$f'(x) = \frac{1}{e^x}(-(x-1)^2) < 0$$

quindi per $x > 0$ la funzione é strettamente decrescente.

$$f''(x) = \frac{1}{e^x}(x-1)(x-3) > 0 \ \forall\ x < 1,\ x > 3$$

Quindi $x = 1, x = 3$ sono punti di flesso a tangente obliqua (la derivata prima non é nulla!), e la funzione é convessa per $x \in (0,1),\ x > 3$.

Per $x < 0$ studio $f(x) = \frac{1-x^2}{e^x}$. La funzione su annulla per $x = -1$. Studio la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{e^x}(x^2 - 2x - 1) \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq 1 - \sqrt{2}$$

quindi per $x = 1 - \sqrt{2}$ la funzione ha un massimo (assoluto). Studio la derivata seconda

$$f''(x) = \frac{1}{e^x} - (x^2 - 4x + 1) = 0 \Longleftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3} > 0$$

quindi per $x < 0$ la derivata seconda é sempre negativa e la funzione é concava.

Esercizio 2.
Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt$$

Per il teorema della media integrale:

$$\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} = (2x - x)\frac{\sin \xi}{\xi}$$

Ora, poiché se $x \to 0$ anche $\xi \to 0$, e grazie alla continuitá della funzione $\frac{\sin \xi}{\xi}$, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{x\to 0^+} x\frac{\sin \xi}{\xi} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Esercizio 3.
Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$\int x \cos x^2 (\sin^2 x^2) dx; \qquad \int \frac{dx}{x(x^2 + 2x + 3)}$$

Primo integrale: sostituendo $\sin x^2 = t,\ 2x \cos x^2 dx = dt$ si ha

$$\int x \cos x^2 (\sin^2 x^2) dx = \frac{1}{2} \int t^2 = \frac{t^3}{6} = \frac{\sin^3 x^2}{6}$$

Secondo integrale: risolvendo il sistema:

$$\frac{1}{x(x^2 + 2x + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 3}$$

si trovano i valori $A = \frac{1}{3},\ B = -\frac{1}{3},\ C = -\frac{2}{3}$ e si ottiene

$$\frac{1}{x(x^2 + 2x + 3)} = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 3} + \int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} \right] =$$

$$\frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{6}\ln(x^2+2x+3) - \frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

Esercizio 4.
Un triangolo rettangolo di ipotenusa data H viene fatto ruotare attorno a uno dei due cateti per generare un cono circolare retto. Si trovi il cono di volume massimo. (Volume cono $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$)
Se x é il cateto base del triangolo, $\sqrt{H^2 - x^2}$ é l'altro cateto, ovvero l'altezza del cono. Il volume del cono sará:

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi(H^2 - x^2)x$$

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}H^2 - \pi x^2 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{H}{\sqrt{3}}$$

(prendiamo solo la soluzione positiva perché si tratta di misure di segmenti). Pertanto il raggio trovato é $r = \sqrt{\frac{2}{3}}H$ e l'altezza del cono é $h = \frac{H}{\sqrt{3}}$

Esercizio 5.
Le notazioni sono quelle del Giusti I.
Dare la definizione di integrale di Riemann di una funzione limitata e nulla fuori di un compatto.
Data una funzione f limitata e nulla fuori di un compatto, diremo che f é integrabile secondo Riemann se si ha:

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{S}_+(f)} \mathcal{I}(\varphi) = \sup_{\psi \in \mathcal{S}_-(f)} \mathcal{I}(\psi)$$

Il numero reale cosí definito si chiamerá integrale di Riemann della funzione f.

Enunciare una condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione (limitata e nulla fuori di un compatto) sia integrabile.
Ad esempio:
condizione necessaria e sufficiente affinché f (limitata e nulla fuori di un compatto) sia integrabile é che $\forall\varepsilon > 0\ \exists\varphi_1,\ \varphi_2 : \varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$ e si abbia

$$\mathcal{I}(\varphi_1) - \mathcal{I}(\varphi_2) < \varepsilon.$$

Enunciare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.
Sia $f(x)$ una funzione **continua (!!!)** in $[a, b)$. La funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi$$

é derivabile e si ha , per ogni $x \in [a, b)$,

$$F'(x) = f(x).$$

Inoltre, se $G(x)$ é una funzione derivabile in $[a, b)$ tale che $G'(x) = f(x)$ in $[a, b)$, allora

$$F(x) = G(x) - G(a).$$

Enunciare il Teorema della Media Integrale.
Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b)$ e siano $x_1, x_2 \in [a, b)$. Esiste allora un punto $\xi \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f(\xi) = \frac{1}{x_1 - x_2} \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$$