

ESERCIZI SUGLI INTEGRALI IMPROPRI

Calcolare i seguenti integrali:

$$1) \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-4)\sqrt{|x|}}$$

Conviene spezzare l'intervallo $(-1, 1)$ in $(-1, 0] \cup (0, 1)$.

$\int_0^{+1} \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{+1} \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x}}$. Si può svolgere l'integrale indefinito sostituendo $x = t^2$ e si ottiene $\frac{1}{2} \log \left| \frac{t-2}{t+2} \right| = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \right|$. Quindi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{+1} \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \log 3 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sqrt{\varepsilon}-2}{\sqrt{\varepsilon}+2} \right| = \frac{1}{2} \log 3.$$

Analogamente si calcola che $\int_{-1}^0 \frac{dx}{(x-4)\sqrt{|x|}} = -\arctan \frac{1}{2}$

$$2) \int_0^{+\infty} (x^2 - x)e^{-x} dx \quad [\mathbf{R.1}]$$

$$3) \int_2^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2} dx \quad [\mathbf{R.} -\frac{2}{3} \log 2 + \log 3]$$

$$4) \int^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \quad [\mathbf{R.} \frac{\pi}{4}]$$

$$5) \int_0^{+\infty} x^{-2} e^{-\frac{1}{x}} dx \quad [\mathbf{R.1}]$$

6) Discutere al variare di α e β l'esistenza del seguente integrale:
 $\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \sin \alpha x dx \quad [\mathbf{R.} \text{esiste per } \alpha = 0, \forall \beta, \text{ e } \alpha \neq 0, \beta \geq 0]$

Dire se i seguenti integrali convergono o meno:

$$7) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^{x^x-1}-1} \quad [\mathbf{R.} \text{ converge}]$$

Svolgimento: innanzitutto osserviamo che
 $\lim_{x \rightarrow 0} x^{x^x-1} - 1 = \lim_{x \rightarrow 0} e^{(x^x-1) \log x} = 1$,
quindi l'integrando tende a $+\infty$ in zero.
Confrontiamolo con la funzione $\frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$.

Usando De L'Hopital si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha}{e^{(x^x-1)\log x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^{x \log x} [e^{\log x} (\log x + 1) \log x + ((x^x - 1) \frac{1}{x})]}.$$

Per ogni $\alpha \in (0, 1)$ il limite viene finito (zero).

$$8) \int_0^1 x^{\log x} dx \quad [\mathbf{R. non converge}]$$

$$9) \int_0^{+\infty} \sin^2 x dx \quad [\mathbf{R. non converge}]$$

$$10) \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{x^2} dx \quad [\mathbf{R. converge}]$$

$$11) \int_0^2 \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sin x} dx \quad [\mathbf{R. converge}]$$

$$12) \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{x}}{x} dx \quad [\mathbf{R. converge}]$$