Tutorato VII (07/05/2003)

(Integrazione secondo Riemann in $\mathbb{R}^2$)

Esercizio 1.

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy &= \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy = \int_1^2 x^2\,dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{y^2}\,dy = \\
&= \int_1^2 x^2 \left[-\frac{1}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^{x} dx = \int_1^2 x^2 \left[x - \frac{1}{x}\right] dx = \\
&= \int_1^2 (x^3 - x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \\
&= \frac{9}{4}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2. Osserviamo innanzitutto che il dominio D si può scrivere come dominio *normale rispetto alle* x:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le 1\right\}\ ;$$

quindi:

$$\begin{aligned}
\iint_D y^3 e^x\,dx\,dy &= \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 y^3 e^x\,dy = \int_0^1 y^3\,dy \int_{y^2}^1 y^3 e^x\,dy = \\
&= \int_0^1 y^3 \left(e - e^{y^2}\right) dy = \int_0^1 y^3 e\,dy - \int_0^1 y^3 e^{y^2} = \\
&= \frac{e}{4} - \left[\frac{y^2}{2} e^{y^2}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{y^2} y\,dy = \\
&= \frac{e}{4} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2}\left[e^{y^2}\right]_0^1 = \\
&= \frac{e}{4} - \frac{e}{2} + \frac{e}{2} - \frac{1}{2} = \\
&= \frac{e}{4} - \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 3. Osserviamo innanzitutto che il dominio D si può scrivere come dominio *normale rispetto alle* y:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \le x \le 1,\ 1 - x \le y \le \sqrt{1 - x^2}\right\}\ ;$$

quindi:

$$
\begin{aligned}
\iint_D xy\,dx\,dy &= \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy = \\
&= \int_0^1 x\,dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy = \\
&= \int_0^1 \frac{x}{2}\left[1 - x^2 - (1-x)^2\right]\,dx = \\
&= \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \\
&= \frac{1}{12}\,.
\end{aligned}
$$

Esercizio 4. Cominciamo a trovare i punti di intersezione tra le varie curve (ovviamente tutte si incontrano nell'origine 0):

$$
\begin{cases} y = \dfrac{x}{a} \\ y = a^2x^2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad A_a = \left(\frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}\right)
$$

$$
\begin{cases} y = ax \\ y = a^2x^2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad B_a = \left(\frac{1}{a}, 1\right)\,.
$$

La regione R_a racchiusa da queste curve è una "*regione triangolare*", di vertici O, A_a e B_a. Calcoliamone l'area:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(a) &:= \text{Area}(R_a) = \iint_{R_a} dx\,dy \ = \\
&= \int_0^{\frac{1}{a^3}} dx \int_{\frac{x}{a}}^{ax} dy + \int_{\frac{1}{a^3}}^{\frac{1}{a}} dx \int_{a^2x^2}^{ax} dy = \\
&= \int_0^{\frac{1}{a^3}} \left(ax - \frac{x}{a}\right)\,dx + \int_{\frac{1}{a^3}}^{\frac{1}{a}} \left(ax - a^2x^2\right)\,dx = \\
&= \frac{1}{6a}\left[1 - \frac{1}{a^6}\right]\,.
\end{aligned}
$$

Osserviamo che

$$
\lim_{a\to 1^+} \mathcal{A}(a) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{a\to +\infty} \mathcal{A}(a) = 0
$$

quindi deve ammettere un punto di massimo (per $a > 1$). Studiando la derivata prima:

$$\mathcal{A}'(a) = \frac{1}{6}\left[-\frac{1}{a^2} + \frac{7}{a^8}\right]$$

che si annulla per $a = \pm\sqrt[6]{7}$; quindi il massimo che stiamo cercando è per $a = \sqrt[6]{7}$, dove l'area vale

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\max} &= \frac{1}{6\sqrt[6]{7}}\left[1 - \frac{1}{7}\right] = \\
&= \frac{1}{6\sqrt[6]{7}}\frac{6}{7} = \\
&= \frac{1}{7\,\sqrt[6]{7}}\,.
\end{aligned}$$