Tutorato VI (09/04/2003)
(Massimi e minimi vincolati)

Esercizio 1. Cominciamo col formalizzare il problema. Osserviamo innanzitutto che (a meno di rotazioni) possiamo considerare solamente i rettangoli che hanno i lati paralleli agli assi coordinati; inoltre tali rettangoli saranno simmetrici rispetto agli assi delle x e delle y. Quindi, indicando con (x, y) le coordinate del vertice del rettangolo nel semipiano $\Pi^+ \equiv \{x \geq 0\,,\ y \geq 0\}$, otteniamo che la funzione da massimizzare (che rappresenta l'area del rettangolo) è data da:

$$f(x, y) = 4xy\,.$$

Individuiamo ora il vincolo, cioè le condizioni che il punto (x, y) deve soddisfare:

- innanzitutto si dovrà avere $x \geq 0$ e $y \geq 0$ (in quanto abbiamo supposto che $(x, y) \in \Pi^+$);
- inoltre tale punto dovrà stare sulla circonferenza di raggio R, cioè:

$$x^2 + y^2 = R^2\,.$$

Quindi il vincolo sarà dato da:

$$V \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,:\, x \geq 0,\ y \geq 0, \quad x^2 + y^2 = R^2\}\,.$$

Tale vincolo rappresenta un quarto di circonferenza di raggio R (la parte in Π^+); inoltre negli estremi di tale curva (cioè nei punti corrispondenti a $x = 0$ o $y = 0$) la funzione f si annulla, e quindi tali punti non possono corrispondere a dei punti massimizzanti.
Applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Definiamo la funzione

$$F(x, y, \lambda) = 4xy - \lambda(x^2 + y^2 - R^2)$$

e cerchiamone i punti critici. Imponendo l'annullamento del gradiente otteniamo:

$$\begin{aligned} \partial_x F(x, y, \lambda) &= 4y + 2\lambda x = 0 \\ \partial_y F(x, y, \lambda) &= 4x + 2\lambda y = 0 \\ \partial_\lambda F(x, y, \lambda) &= x^2 + y^2 - R^2 = 0 \end{aligned}$$

troviamo che l'unico punto critico con $x > 0$ e $y > 0$, è dato da

$$P = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}, \lambda = -2\right)\,.$$

Quindi il rettangolo inscritto con area massima è (a meno di rotazioni) quello con vertici:

$$P_1 = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}\right), P_2 = \left(-\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}\right), P_3 = \left(-\frac{R}{\sqrt{2}}, -\frac{R}{\sqrt{2}}\right), P_4 = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}, -\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$$

che ha area $A = \dfrac{R^2}{2}$.

Esercizio 2.

1. La funzione non è limitata né inferiormente, né superiormente su $\mathbb{R}^2$. Infatti, se studiamo il comportamento della f sulla retta $y = x$, otteniamo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,x) = \lim_{x\to\pm\infty} x - x^3 = \pm\infty\,;$$

quindi

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty \qquad \text{e} \qquad \inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty\,.$$

2. Imponendo l'annullamento del gradiente della f otteniamo:

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 2x - y^2 = 0 \\ \partial_y f(x,y) = -2xy = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0\,. \end{cases}$$

Tale punto non è né di massimo, né di minimo. Infatti $f(0,0) = 0$, ma in ogni intorno (arbitrariamente piccolo) dell'origine, la funzione assume sia valori positivi che negativi. Ad esempio in $B_\delta(0,0)$, con $0 < \delta < 1$, possiamo considerare i punti

$$P_1 = \left(\delta^2, \frac{\delta}{2}\right) \qquad \text{e} \qquad P_2 = \left(-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)\,;$$

in tali punti si ha:

$$f(P_1) = -\frac{3}{4}\delta^2 < 0 \qquad \text{e} \qquad f(P_2) = \frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^3}{8} > 0\,.$$

3. K è la regione del piano delimitata dalle rette $x = \pm\frac{1}{2}$ e da due archi della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$; in particolare i suoi "vertici" sono nei punti:

$$A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), C = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), D = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\,.$$

In particolare in tali punti si ha:

$$\begin{aligned} f(A) &= f(C) = \frac{5}{8} \\ f(B) &= f(D) = -\frac{1}{8}\,. \end{aligned}$$

Studiamo la funzione sui "lati verticali", cioè sulle rette

$$L_\pm = \left\{x = \pm\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2} < y < \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\,.$$

- Su L_+:

$$\begin{aligned} f_+(y) &= f(x,y)_{|L+} = f(\frac{1}{2}, y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}y^2 \\ f_+'(y) &= -y \end{aligned}$$

quindi si ha un punto di massimo locale in $E = (\frac{1}{2}, 0)$, con $f(E) = \frac{1}{4}$.

- Su L_-:

$$\begin{aligned} f_-(y) &= f(x,y)_{|L_-} = f(-\frac{1}{2},y) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}y^2 \\ f'_-(y) &= y \end{aligned}$$

quindi si ha un punto di minimo locale in $G=(-\frac{1}{2},0)$, con $f(G)=\frac{1}{4}$.

Studiamo ora gli estremi vincolati sui due archi di circonferenza. Consideriamo la funzione:

$$F(x,y,\lambda) = x^2 - xy^2 - \lambda(x^2+y^2-1)\,.$$

Dobbiamo trovare le soluzione del sistema, ottenuto imponendo l'annullamento del gradiente:

$$\begin{cases} 2x - y^2 = 2\lambda x \\ -2xy = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1\,; \end{cases}$$

dalla seconda equazione si ottiene che $y=0$ (ma allora $x=\pm 1$, che non è ammissibile in quanto non appartiene ai due archi che stiamo considerando), oppure $x=-\lambda$, da cui si ottiene l'equazione $3x^2+2x-1=0$. La soluzione $x=-1$ non è ammissibile, quindi l'unica soluzione ammissibile è $x=\frac{1}{3}$, con $y=\frac{\sqrt{8}}{3}$. Abbiamo trovato quindi un punto critico vincolato

$$H = \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{8}}{3}\right)$$

in cui la funzione vale $f(H)=-\frac{5}{27}$.
In conclusione:

- Il massimo assoluto in K è $\frac{5}{8}$, che viene assunto nei punti A e B;
- il minimo assoluto in K è $-\frac{5}{27}$, che viene assunto nel punto H.

Esercizio 3. Denotiamo con $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^4 x_i = 1\}$. Cominciamo con l'osservare che $f(x)\geq 0$ per ogni $x\in\mathcal{D}$; da ciò si deduce che il valore minimo di f è proprio 0: basta infatti calcolare la funzione nel punto $x_m = (0,0,0,1) \in \mathcal{D}$. Calcoliamone ora il valore massimo. Applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange; consideriamo la funzione

$$F(x,\lambda) = \prod_{i=1}^4 x_i^i - \lambda\left(\sum_{i=1}^4 x_i - 1\right)$$

e imponiamo l'annullamento del gradiente:

$$\begin{cases} \partial_{x_j} F(x,\lambda) = j\dfrac{\prod_{i=1}^4 x_i^i}{x_j} - \lambda = 0 \qquad j=1,2,3,4 \\ \sum_{i=1}^4 x_i = 1\,. \end{cases}$$

Dalla prima equazione, otteniamo (possiamo supporre che $x_j \neq 0$, in quanto se $x_j = 0$ già sappiamo che funzione vale 0, che è il minimo):

$$\lambda = j\frac{\prod_{i=1}^4 x_i^i}{x_j} \qquad \forall\, j = 1, 2, 3, 4.$$

Quindi ricaviamo:

$$\begin{aligned}
2\frac{\prod_{i=1}^4 x_i^i}{x_2} &= \frac{\prod_{i=1}^4 x_i^i}{x_1} &\iff&& x_2 = 2x_1 \\
3\frac{\prod_{i=1}^4 x_i^i}{x_3} &= \frac{\prod_{i=1}^4 x_i^i}{x_1} &\iff&& x_3 = 3x_1 \\
4\frac{\prod_{i=1}^4 x_i^i}{x_4} &= \frac{\prod_{i=1}^4 x_i^i}{x_1} &\iff&& x_4 = 4x_1\,,
\end{aligned}$$

e sostituendo nell'equazione del vincolo:

$$x_1(1 + 2 + 3 + 4) = 1 \qquad \iff \qquad x_1 = \frac{1}{10}\,.$$

Quindi, il massimo viene assunto nel punto

$$x_M = \left(\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right)$$

e vale $f(x_M) = \dfrac{27648}{10^{10}}$.

Esercizio 4. Cominciamo col calcolare l'estremo inferiore. Osserviamo che

$$f(x, y) \geq 0 \qquad \forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Consideriamo la successione $\{(\frac{1}{n}, 2n)\}_n$, che è ovviamente contenuta in $\mathcal{A}$; si ha che

$$\lim_{n\to 0} f\left(\frac{1}{n}, 2n\right) = 0$$

da cui si deduce che

$$\inf_{\mathcal{A}} f = 0\,.$$

Procediamo ora con la seguente osservazione: si può dimostrare che la funzione $g(t) = t + \frac{1}{2}\sin t$ è strettamente crescente e poiché $\lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$ e $\lim_{t\to-\infty} g(t) = -\infty$ si può concludere che $\exists!\ c$ tc $g(t) > 1$ per $t > c$ e $g(t) < 1$ per $t <$c.
Quindi $\mathcal{A} = \{(x, y)$ t.c. $y > \frac{c}{x}\}$. Studiando il comportamento della funzione sul bordo $\partial\mathcal{A}$ (con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange), si trova che la funzione ha un massimo vincolato in $P_1 = (\sqrt{c}, \sqrt{c})$ e $P_2 = (-\sqrt{c}, -\sqrt{c})$, in cui la funzione vale $\frac{1}{2c}$.
Si verifica facilmente che $\sup_{\mathcal{A}} f = \dfrac{1}{2c}$. Infatti, supponiamo che esista un punto $(x_0, y_0) \in \mathcal{A}$ tale che $f(x_0, y_0) > \dfrac{1}{2c}$; osservando che

$$(x_0, y_0) \in \mathcal{A} \qquad \Longrightarrow \qquad x_0 y_0 > c\,,$$

otteniamo:

$$\frac{1}{f(x_0, y_0)} = x_0^2 + y_0^2 < 2c < 2xy \iff x_0^2 + y_0^2 - 2x_0y_0 < 0$$
$$\iff (x_0 - y_0)^2 < 0$$

che è assurdo!
Nota: Osserviamo che c si può ricavare con approssimazione arbitrariamente piccola: utilizzando dei metodi numerici (ad esempio il metodo di bisezione) si ottiene che $0.68403 < c < 0.68404$.