Tutorato II (12/03/2003)
(Costanti di Lipschitz e spazi di Banach)

Esercizio 1.
<u>Nota</u>: In tale contesto $|\cdot|$ indicherà la norma euclidea su $\mathbb{R}^n$.

(i) Siano $x,\, y \in B_1(0)$. Consideriamo separatamente le due componenti di

$$f(x) - f(y) = \left(\frac{1}{2-|x|} - \frac{1}{2-|y|},\ \left|\sin \prod_{i=1}^{n} x_i\right| - \left|\sin \prod_{i=1}^{n} y_i\right| \right).$$

<u>Prima componente:</u>[1]

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2-|x|} - \frac{1}{2-|y|}\right| &= \left|\frac{2-|y|-2+|x|}{(2-|x|)(2-|y|))}\right| = \frac{|\,|x|-|y|\,|}{(2-|x|)(2-|y|)} \leq \\ &\leq \frac{|x-y|}{(2-|x|)(2-|y|)} \leq |x-y|\,.\end{aligned}$$

Osserviamo che questa stima è ottimale. Infatti, se consideriamo (al variare di m in $\mathbb{N}$) i punti

$$\begin{aligned} x_m &= \left(1 - \frac{1}{2m},\, 0,\, \dots,\, 0\right) \\ y_m &= \left(1 - \frac{1}{m},\, 0,\, \dots,\, 0\right) \end{aligned}$$

otteniamo:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2-|x_m|} - \frac{1}{2-|y_m|}\right| &= \left|\frac{1}{2-1+\frac{1}{2m}} - \frac{1}{2-1+\frac{1}{m}}\right| = \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{2m}} - \frac{1}{1+\frac{1}{m}} = \\ &= \frac{2m}{(1+2m)} - \frac{m}{(1+m)} = \\ &= \frac{m}{(2m+1)(m+1)} = \\ &= \frac{2m^2}{(2m+1)(m+1)}\frac{1}{2m} = \\ &= \frac{2m^2}{(2m+1)(m+1)}|x_m - y_m|\,.\end{aligned}$$

Quindi la costante L_m che rende *sharp* la disuguaglianza sopra (nel caso x_m e y_m) è data da

$$L_m := \frac{2m^2}{(2m+1)(m+1)} \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

[1] Utilizzeremo i seguenti fatti:

1. $|\,|x|-|y|\,| \leq |x-y|$, per ogni $x,\, y \in \mathbb{R}^n$;
2. $2-|x| \geq 1$, per ogni $x \in B_1(0)$.

e di conseguenza $L \geq 1$.

Seconda componente:[2]

$$\begin{aligned}
\left| \left| \sin \prod_{i=1}^{n} x_i \right| - \left| \sin \prod_{i=1}^{n} y_i \right| \right| &\leq \left| \sin \prod_{i=1}^{n} x_i - \sin \prod_{i=1}^{n} y_i \right| \leq \left| \prod_{i=1}^{n} x_i - \prod_{i=1}^{n} y_i \right| \leq \\
&\leq \left| x_1 \prod_{i=2}^{n} x_i - x_1 \prod_{i=2}^{n} y_i + x_1 \prod_{i=2}^{n} y_i - y_1 \prod_{i=2}^{n} y_i \right| \leq \\
&\leq |x_1| \left| \prod_{i=2}^{n} x_i - \prod_{i=2}^{n} y_i \right| + \left| \prod_{i=2}^{n} y_i \right| |x_1 - y_1| \leq \\
&\leq |x_1 - y_1| + \left| \prod_{i=2}^{n} x_i - \prod_{i=2}^{n} y_i \right| \leq \\
&\leq \ldots \leq \\
&\leq |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| = \\
&= \|x - y\|_1 \leq \\
&\leq \sqrt{n}\,|x - y|\,.
\end{aligned}$$

Mettendo insieme le due stime precedenti, otteniamo:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &\leq \sqrt{\left(\frac{1}{2 - |x|} - \frac{1}{2 - |y|} \right)^2 + \left(\left| \sin \prod_{i=1}^{n} x_i \right| - \left| \sin \prod_{i=1}^{n} y_i \right| \right)^2} \leq \\
&\leq \sqrt{|x - y|^2 + n|x - y|^2} = \sqrt{n+1}\,|x - y|\,.
\end{aligned}$$

Quindi possiamo prendere

$$L = \sqrt{n+1}\,.$$

(ii) Prendiamo innanzitutto in esame il caso in cui

$$\Omega = B_1(x_0)$$

con $x_0 = (2, \ldots, 2)$.

Facciamo delle osservazioni preliminari. Se $x \in \Omega$ allora

$$2\sqrt{n} - 1 \leq |x| \leq 2\sqrt{n} + 1$$

e quindi

$$\alpha_n := 2 - \sqrt{2\sqrt{n} + 1} \leq 2 - |x|^{\frac{1}{2}} \leq 2 - \sqrt{2\sqrt{n} - 1} =: \beta_n\,.$$

Osserviamo che:

[2] Utilizzeremo i seguenti fatti:

1. $\big| |x| - |y| \big| \leq |x - y|$, per ogni $x,\ y \in \mathbb{R}^n$;
2. $|\sin t - \sin s| \leq |t - s|$, per ogni $t,\ s \in \mathbb{R}$;
3. $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}|x|$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Se $n = 1, 2$ allora $\alpha_n,\ \beta_n > 0$.
2. Se $n = 3, 4, 5, 6$ allora $\alpha_n < 0 < \beta_n$, quindi la funzione f presenta una singolarità nel dominio Ω. In particolare se $n = 4$ tale singolarità è proprio in x_0.
3. Se $n \geq 7$ allora $\alpha_n,\ \beta_n < 0$.

Considereremo quindi $n \neq 3, 4, 5, 6$. In tali casi avremo la seguente stima:

$$\alpha_n^2 \leq (2 - |x|^{\frac{1}{2}})(2 - |y|^{\frac{1}{2}}) \leq \beta_n^2 \, .$$

Infine notiamo che in $I_n = (2\sqrt{n}-1, 2\sqrt{n}+1)$ la funzione *radice quadrata* è lipschitziana. Questa è una semplice conseguenza del teorema di Lagrange; infatti se $s,\ t \in I_n$ allora

$$\begin{aligned} |\sqrt{s} - \sqrt{t}| &\leq \left(\sup_{\xi \in I_n} \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \right) |s - t| = \\ &= \frac{1}{2(2\sqrt{n} - 1)} |s - t| \, . \end{aligned}$$

Possiamo ora mostrare la stima cercata. Siano $x, y \in B_1(x_0)$, allora:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2 - |x|^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2 - |y|^{\frac{1}{2}}} \right| &= \frac{|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\,|}{|(2 - |x|^{\frac{1}{2}})(2 - |y|^{\frac{1}{2}})|} \leq \\ &\leq \frac{|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}|}{\alpha_n^2} \leq \\ &\leq \frac{||x| - |y||}{2\alpha_n^2(2\sqrt{n} - 1)} \leq \\ &\leq \frac{1}{2\alpha_n^2(2\sqrt{n} - 1)} |x - y| \, . \end{aligned}$$

Quindi possiamo prendere

$$L = \frac{1}{2\alpha_n^2(2\sqrt{n} - 1)} \, .$$

Passiamo ora a considerare il caso in cui

$$\Omega = B_1(0) \, .$$

Mostriamo che in questo caso non esiste una costante L che soddisfa la condizione richiesta. Consideriamo infatti i seguenti punti (al variare di m in $\mathbb{N}$):

$$\begin{aligned} x_m &= \left(\frac{1}{n^2}, 0, \ldots, 0 \right) \\ y_m &= \left(\frac{1}{4n^2}, 0, \ldots, 0 \right) . \end{aligned}$$

Otteniamo:

$$\begin{aligned}
|f(x_m) - f(y_m)| &= \left| \frac{1}{2-\sqrt{|x_m|}} - \frac{1}{2-\sqrt{|y_m|}} \right| = \\
&= \left| \frac{1}{2-\sqrt{\frac{1}{m^2}}} - \frac{1}{2-\sqrt{\frac{1}{4m^2}}} \right| = \\
&= \left| \frac{1}{2-\frac{1}{m}} - \frac{1}{2-\frac{1}{2m}} \right| = \\
&= \left| \frac{m}{2m-1} - \frac{2m}{4m-1} \right| = \\
&= \frac{m}{(2m-1)(4m-1)} = \\
&= \frac{4m^3}{3(2m-1)(4m-1)} \frac{3}{4m^2} = \\
&= \frac{4m^3}{3(2m-1)(4m-1)} |x_m - y_m| \,.
\end{aligned}$$

Se esistesse una costante L con le proprietà richieste, si dovrebbe avere:

$$L \geq L_m := \frac{4m^3}{3(2m-1)(4m-1)} \stackrel{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

e questo conclude la dimostrazione della *non esistenza* di una simile L.

(iii) Siano $x,\, y \in B_r(0)$, con $r > 0$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left| e^{|x|^2} x - e^{|y|^2} y \right| \leq \\
&\leq \left| e^{|x|^2} x - e^{|x|^2} y \right| + \left| e^{|x|^2} y - e^{|y|^2} y \right| \leq \\
&\leq e^{|x|^2} |x-y| + |y| |e^{|x|^2} - e^{|y|^2}| \leq \\
&\leq e^{r^2} |x-y| + r e^{r^2} (|x| + |y|) \,|\, |x| - |y| \,| \leq \\
&\leq e^{r^2} (1 + 2r^2) |x-y| \,.
\end{aligned}$$

Quindi possiamo prendere

$$L = e^{r^2} (1 + 2r^2) \,.$$

Esercizio 2. Ricordiamo alcune definizioni che useremo in seguito.[3]

Definizione (Compattezza). *Uno spazio topologico X si dice* compatto *se ogni suo ricoprimento aperto (cioè costituito da insiemi aperti) possiede un sottoricoprimento finito, cioè possiede una sottofamiglia costituita da un numero finito di insiemi che è ancora un ricoprimento dello spazio.*

[3]Cfr. E. Sernesi, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri (1994).

Definizione (Compattezza numerabile). *Uno spazio topologico X si dice* numerabilmente compatto *se ogni sottoinsieme infinito $Z \subset X$ possiede un punto di accumulazione.*

Definizione (Compattezza per successioni). *Uno spazio topologico X si dice* compatto per successioni *se ogni successione di elementi di X possiede una sottosuccessione convergente ad un elemento di X.*

Si dimostrano le seguenti relazioni fra queste definizione:

X compatto $\Rightarrow$ X numerabilmente compatto $\Leftarrow$ X compatto per successioni.

Nessuna delle implicazioni precedenti è - in generale - un'equivalenza. Si può però dimostrare in generale il seguente risultato:

Teorema. *Sia X uno spazio metrizzabile. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) X è compatto.

(b) X è numerabilmente compatto.

(c) X è compatto per successioni.

Torniamo ora al nostro esercizio.

(i) Mostriamo che l'insieme Ω non è compatto. Poiché stiamo considerando uno spazio normato (e quindi metrico) la definizione di compattezza è equivalente alla definizione di compattezza per successioni. Facciamo vedere quindi che esiste una successione in Ω che non ammette alcuna sottosuccessione convergente. Consideriamo la successione $\{x^{(n)}\}_n$ così definita:

$$x^{(n)} = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, \ldots)\,.$$

Se prendiamo due generici elementi della successione $x^{(n)}$ ed $x^{(m)}$, con $n \neq m$, si osserva che la loro distanza (nella metrica indotta dalla norma) è costante, cioè

$$d\left(x^{(n)}, x^{(m)}\right) \quad = \quad \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_1 = 2$$

e quindi non è possibile estrarre alcuna sottosuccesione convergente.

(ii) Anche in questo caso è più semplice mostrare la compattezza per successioni. Supponiamo di avere una successione $\{x^{(n)}\}_n$ in D e facciamo vedere che è possibile estrarre una sottosuccessione convergente. Possiamo considerare la naturale immersione di D in $\mathbb{R}^{10}$

$$\begin{aligned} i : D &\longrightarrow \mathbb{R}^{10} \\ x &\longmapsto (x_1, \ldots, x_{10}) \end{aligned}$$

ed osservare che $i(D)$ è la palla unitaria in $\mathbb{R}^{10}$, rispetto alla $\|\cdot\|_\infty$; in particolare

$$i : D \longrightarrow i(D)$$

è una biezione.
Quindi è possibile associare alla successione $\{x^{(n)}\}_n$ una sottosuccessione $\{y^{(n)}\}_n$ in $i(D)$, data da $y^{(n)} = i(x^{(n)})$.
Osserviamo che $i(D)$ è compatto in $(\mathbb{R}^{10}, \|\cdot\|_\infty)$ e quindi è compatto per successioni, cioè esiste una sottosuccessione $\{y_{n_k}\}_k$, convergente ad un certo $y \in i(D)$, i.e:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_0 = N_0(\varepsilon) \quad \text{t.c.} \quad \text{se} \quad k \geq N_0 \quad \text{allora} \quad \|y^{(n_k)} - y\|_\infty \leq \varepsilon\,.$$

Mostriamo che la sottosuccessione $\{x^{(n_k)}\}_k$, data da

$$x^{(n_k)} = i^{-1}(y^{(n_k)})$$

è una successione convergente in $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$, e che converge ad un limite $x = i^{-1}(y) \in D$. Infatti, se $k \geq N_0$ abbiamo:

$$\begin{aligned} \|x^{(n_k)} - x\|_1 &= \sum_{j=1}^{10} |x_j^{(n_k)} - x_j| = \\ &= \sum_{j=1}^{10} |y_j^{(n_k)} - y_j| \leq \\ &\leq n\|y^{(n_k)} - y\|_\infty \leq n\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Inoltre $x \in D$ per come è stata definita.