Tutorato X (28/05/2003)
(Teorema della divergenza e teorema di Stokes)

Esercizio 1. Vogliamo verificare il teorema della divergenza in $\mathbb{R}^2$, cioè mostrare la seguente uguaglianza:

$$\int_A \mathrm{div} f \, dx \, dy = \int_{\partial A} f \cdot \nu \, d\sigma_1 \, ,$$

dove con ν intendiamo il versore normale esterno al bordo ∂A. Cominciamo col calcolare l'integrale al primo membro di tale uguaglianza (passando il coordinate polari, con origine nel punto $(2,0)$):

$$\begin{aligned} \int_A \mathrm{div} f \, dx \, dy &= \int_A [\partial_x(1+xy) + \partial_y(x)] \, dx \, dy = \\ &= \int_A y \, dx \, dy = \\ &= \int_0^\pi d\theta \int_0^1 \rho^2 \sin\theta \, d\rho = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin\theta d\theta = \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il secondo integrale, osserviamo che ∂A è una varietà (una curva) costituita da due tratti regolari, che possiamo parametrizzare nel seguente modo:

$$\partial A_1 = \{(t,0) \ 1 < t < 3\} \quad \text{e} \quad \partial A_2 = \{(2+\cos\theta, \sin\theta) \ 0 < \theta < \pi\} \, ;$$

osserviamo che tale parametrizzazione orienta il bordo ∂A positivamente. Osserviamo che i versori normali esterni a ∂A_1 e ∂A_2 (che indicheremeo rispettivamente con ν_1 e ν_2) sono dati da:

$$\nu_1 = (0,-1) \qquad \text{e} \qquad \nu_2 = (\cos\theta, \, \sin\theta) \, .$$

Quindi:

$$\begin{aligned} &\int_{\partial A} f \cdot \nu \, d\sigma_1 = \int_{\partial A_1} f \cdot \nu_1 \, d\sigma_1 + \int_{\partial A_2} f \cdot \nu_2 \, d\sigma_1 = \\ &= \int_1^3 (-t) \, dt + \int_0^\pi (1 + (2+\cos\theta)\sin\theta, 2+\cos\theta) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) \, d\theta = \\ &= \frac{2}{3} \, . \end{aligned}$$

E questo dimostra l'uguaglianza iniziale.

Esercizio 2. Calcoliamo separatamente i due integrali.

1. Cominciamo calcolando l'integrale sul bordo. Osserviamo che $\partial S = \partial S_1 \cup \partial S_2$, con

$$\begin{aligned} \partial S_1 &= \{(\cos t,\, \sin t,\, 0),\ 0 \le t < 2\pi\} \\ \partial S_2 &= \{(\cos t,\, \sin t,\, 1),\ 0 \le t < 2\pi\}\,. \end{aligned}$$

Osserviamo che per orientare ∂S in maniera positiva, dobbiamo orientare il cerchio ∂S_1 (quello alla base inferiore del cilindro) in maniera antioraria (cioè positiva), ed il cerchio ∂S_2 (quello alla base superiore) in maniera oraria (cioè negativa).
Quindi:

$$\begin{aligned} \int_{+\partial S} \omega &= \int_{+\partial S_1} \omega + \int_{-\partial S_2} \omega = \\ &= \int_{+\partial S_1} \omega - \int_{+\partial S_2} \omega = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{1} - \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{2} \right) dt = \\ &= \pi. \end{aligned}$$

2. Calcoliamo ora l'integrale superficiale. Prendiamo come campo vettoriale:

$$F(x,y,z) = (F_1,\, F_2,\, F_3) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2+z^2},\, \frac{x}{x^2+y^2+z^2},\, 0 \right)\,.$$

Usando il fatto che $F_3 = 0$ otteniamo che:

$$\operatorname{rot} F = (-\partial_z F_2,\, \partial_z F_1, \partial_x F_2 - \partial_y F_1).$$

Parametrizziamo S nel seguente modo:

$$S = \{\Phi(t,z) = (\cos t,\, \sin t,\, z) :\ t \in [0, 2\pi),\ z \in [0,1]\}\,;$$

quindi il versore normale esterno è dato da $\nu = (\cos t,\, \sin t,\, 0)$, mentre $\|\partial_t \Phi \wedge \partial_z \Phi\| = 1$. Applicando il teorema di Stokes otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \omega &= \int_S \operatorname{rot} F \times \nu \, d\sigma = \\ &= \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 \frac{2z}{(1+z^2)^2} = \\ &= \pi\,. \end{aligned}$$

Esercizio 3. Indichiamo con $\Phi^+_{\partial\Omega}(F)$ il flusso esterno del campo vettoriale F attraverso la superficie $\partial\Omega$, dove per definizione di flusso si ha che:

$$\Phi^+_{\partial\Omega}(F) = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma_2 \,,$$

dove con ν indichiamo il versore normale esterno alla superficie $\partial\Omega$. Quindi applicando il teorema della divergenza (osserviamo che $\mathrm{div} F = 3$), ed il fatto che Vol(Ω)=1, otteniamo:

$$\Phi^+_{\partial\Omega}(F) = \int_{\Omega} \mathrm{div} F \, dx = 3\mathrm{Vol}(\Omega) = 3.$$