Soluzioni Appello A - AM3

Prof. Luigi Chierchia, Dott. Laura Di Gregorio

19 giugno 2003

3. Si ha che:

- $(n,0,0) \in A$ per $n \geq 2$ e $f(n,0,0) = n^2 \longrightarrow +\infty \Longleftrightarrow \sup_A f = +\infty$

- $(0,0,n) \in A$ per $n \geq 2$ e $f(0,0,n) = -n^2 \longrightarrow -\infty \Longleftrightarrow \inf_A f = -\infty$

$\nabla f = 0 \Longleftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0) \notin A$ quindi non ci sono punti stazionari interni.
Studiamo f sul bordo

$$\partial A = \{x + y + z = 1\}.$$

Sia $F(x,y,z,\lambda) = f - \lambda(x + y + z - 1)$, da cui

$$\begin{cases} 0 = F_x = 2x - \lambda \\ 0 = F_y = 2y - \lambda \\ 0 = F_z = -2z + \lambda \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

quindi troviamo il punto $(x,y,z) = (1,1,-1)$.
Per capire se questo punto è o non è un punto di minimo o massimo relativo, poniamo

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + s \end{cases}$$

da cui segue che $z = -(1+t+s)$ con t, s, piccoli.
Ora consideriamo

$$g(s,t) = f(1+t, 1+s, -(1+t+s)) = 1 - 2ts$$

dunque $(1,1,-1)$ non è un massimo e neanche un minimo relativo.
In conclusione non ci sono punti di massimo o minimo relativo di f in A.

4. (ii) Si ha

$$|f(x) - \Lambda x| = |v \sin x^2| \leq |v||x^2| \leq \sqrt{n}|x^2| \longrightarrow 0$$

per $|x| \to 0$, dunque f è differenziabile e $df\,(\xi) = \Lambda \xi$.

(iii)Risulta

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = j\,\delta_{ij} + 2 v_i x_j \cos|x|^2$$

quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = j\,\delta_{ij} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_j}(v) = j\,\delta_{ij} + 2\cos n^2.$$

(iv)

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |\Lambda||x| + |v||x^2| \\ &= n|x| + \sqrt{n}|x|^2 \leq 2n|x| \end{aligned}$$

se $|x| \leq 1$, quindi

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2n}\right\}.$$

5. Dal teorema di esistenza e unicità per equazioni differenziali ordinarie abbiamo la seguente stima sul tempo di esistenza della soluzione del problema:

$$T < \min\left\{\frac{1}{L}, \frac{r}{M}\right\}$$

dove

$$L \geq \sup_{(x,x')\in B_r} \frac{|f(x)-f(x')|}{|x-x'|} \qquad \text{e} \qquad M = \sup_{x\in B_r} |f(x)|.$$

Scegliamo $r=1$. Osserviamo che se $t, s \in [-1,1]$, dal teorema di Lagrange

$$|t^{100} - s^{100}| \leq 100|t-s|$$

dunque

$$\begin{aligned} |f(x)-f(x')| &= \big||x|^{100} - |x'|^{100}\big| \\ &\leq 100\big||x|-|x'|\big| \leq 100|x-x'|. \end{aligned}$$

Dunque possiamo prendere $L = 100$ e poiché $M = \sup\limits_{|x|<1} |f(x)| = 2$, possiamo prendere $T = \dfrac{1}{101}$.

6. Risulta $\nabla \cdot F = y$, quindi

$$\int_T \nabla \cdot F = \int_T y\, dxdydz = \int_{\widehat{T}_0} y\, dxdy \int_0^{1-x-y} dz$$

dove

$$\widehat{T}_0 = \{x+y \leq 1,\, x\geq 0,\, y \geq 0\}.$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{T}_0} y\, dxdy \int_0^{1-x-y} dz &= \int_{\widehat{T}_0} y(1-x-y)\, dxdy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} y(1-x-y)\, dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^3}{2} - \frac{(1-x)^3}{3}\right] dx \\ &= \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3\, dx = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

D'altra parte, chiamando $\widehat{T}_i$ la i-esima faccia del tetraedro, si ha

$$\begin{aligned}\int_{\partial T} F \cdot n \, d\sigma &= \sum_{i=1}^{4} \int_{\widehat{T}_i} F \cdot n \, d\sigma \\ &= \sum_{i=1}^{4} \int_{\widehat{T}_i} xy \, n_1 \, d\sigma,\end{aligned}$$

dove con n_1 indichiamo la prima componente del vettore normale, che è l'unica che contribuisce.
Ora siano:

- $\widehat{T}_1$ il triangolo sul piano xz che ha come vettore normale $n^1 = (0, -1, 0)$;
- $\widehat{T}_2$ il triangolo sul piano yz che ha come vettore normale $n^2 = (-1, 0, 0)$;
- $\widehat{T}_3$ il triangolo sul piano xy che ha come vettore normale $n^3 = (0, 0, -1)$;
- $\widehat{T}_4$ è il triangolo descritto dai punti

  $$\{x + y + z = 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0, z \geq 0\}$$

  che ha come vettore normale $n^4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

Per come è definita la F l'unico pezzo che contribuisce è quello sul triangolo $\widehat{T}_4$.
Dunque risulta:

$$\sum_{i=1}^{4} \int_{\widehat{T}_i} xy \, n_1 \, d\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\widehat{T}_4} xy \, d\sigma.$$

Parametrizziamo $\widehat{T}_4 = \{x + y + z = 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0, z \geq 0\}$: sia

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - (u + v) \end{cases}$$

cioé $\Psi(u,v) = (u, v, 1-u-v)$.
Si ha che

$$\Psi_u = (1,0,-1), \qquad\qquad \Psi_v = (0,0,-1)$$

per cui è facile controllare che

$$d\sigma = |\Psi_u \times \Psi_v|\, dudv = \sqrt{3}\, dudv.$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\widehat{T}_4} xy\, d\sigma &= \int_{\widehat{T}_0} uv\, dudv \\
&= \int_0^1 u \left(\int_0^{1-u} v\, dv \right) du \\
&= \int_0^1 \frac{(1-u)}{2}^2 u\, du \\
&= -\int_0^1 \frac{(1-u)^3}{2} + \int_0^1 \frac{(1-u)^2}{2} \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

7. Dal teorema di Green si ha che

$$\text{Area}(D) = \int_{\gamma^+} x\, dy$$

dove γ^+ è il bordo di D.
Nel nostro caso si ha:

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= \int_0^1 t(t-1)[(t-1)(2t-1) + t(2t-1) + 2t(t-1)]\, dt \\
&= \int_0^1 [t(t-1)^2(2t-1) + t^2(2t-1)(t-1) + 2t^2(t-1)^2]\, dt \\
&= \int_0^1 t^2(t-1)[2t-1+2(t-1)] + t(t-1)^2(2t-1)\, dt \\
&= \int_0^1 t^2(t-1)[4t-3] + t(t-1)^2(2t-1)\, dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (t^2 - t)(2t^2 - 2t - t + 1 + 4t^2 - 3t)\,dt \\
&= \int_0^1 (t^2 - t)(6t^2 - 6t + 1) \\
&= \int_0^1 (6t^4 - 12t^3 + 7t^2 - t)\,dt = \frac{1}{30}.
\end{aligned}$$

8. Si ha che:

$$\begin{aligned}
\text{Vol} &= \int_{B_1} (x^2 + 2y^2 - x + 1)\,dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^2\cos^2 t + 2r^2\sin^2 t - r\cos t + 1)\,r\,drdt \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{7}{4}\pi.
\end{aligned}$$

9. Sia

$$E = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2].$$

Supponiamo dapprima $\alpha_1, \alpha_2 > 0$.
Sia

$$E' = [\alpha_1 a_1, \alpha_1 a_2] \times [\alpha_2 b_1, \alpha_2 b_2].$$

$$\begin{aligned}
\int_{E'} f(y)\,dy &= \int_E f(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2) \left|\det \frac{\partial y}{\partial x}\right|\,dx \\
&= \alpha_1\alpha_2 \int_E f(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2)\,dx
\end{aligned}$$

Infatti

$$\begin{aligned}
\int_{E'} f(y_1, y_2)\,dy_1 dy_2 &= \int_{\alpha_1 a_1}^{\alpha_1 a_2} \left(\int_{\alpha_2 b_1}^{\alpha_2 b_2} f(y_1, y_2)\,dy_2\right) dy_1 \\
&= \alpha_2 \int_{\alpha_1 a_1}^{\alpha_1 a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} f(y_1, \alpha_2 x_2)\,dx_2\right) dy_1 \\
&= \alpha_1\alpha_2 \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2)\,dx_1 dx_2
\end{aligned}$$

$$= \alpha_1 \alpha_2 \int_E f(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2)\, dx_1 dx_2$$