Soluzioni 9-Am3

Dott. Laura Di Gregorio

14 maggio 2003

1. Osserviamo che per ogni $(x, y) \in \mathcal{D}$

$$y \geq 2x^2 \quad \text{e} \quad x \geq \frac{1}{y}$$

quindi $\mathcal{D}$ è contenuto nel primo quadrante aperto.
Facciamo il cambio di coordinate

$$\frac{x^2}{y} = \xi \quad \text{e} \quad xy = \eta \tag{1}$$

e sia

$$\Phi : \, (x, y) \longrightarrow (\xi, \eta)$$

la trasformazione definita da (1), allora

$$\Phi(\mathcal{D}) = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \, \frac{1}{3} \leq \xi \leq \frac{1}{2}, \, \frac{1}{2} \leq \eta \leq 1\}.$$

Inoltre Φ è invertibile su Q e

$$|J\Phi(x, y)| = \begin{vmatrix} \frac{2x}{y} & \frac{-x^2}{y^2} \\ y & x \end{vmatrix} = \frac{3x^2}{y}$$

da cui

$$|J\Phi^{-1}(\xi, \eta)| = \frac{1}{J\Phi(\Phi^{-1}(\xi, \eta))} = \frac{1}{3\xi}.$$

Quindi

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{x^2}{y} \, e^{xy} \, dx \, dy \quad = \quad \iint_{\Phi(\mathcal{D})} \xi \, e^{\eta} |J\Phi^{-1}(\xi, \eta)| \, d\xi \, d\eta$$

$$= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{e^\eta}{3}\, d\eta \right] d\xi = \frac{e-\sqrt{e}}{18}.$$

2. Consideriamo $\mathcal{D}_\varepsilon = \big\{(x,y) \in \mathcal{A}_\varepsilon : \; y \geq \varepsilon\big\}$. Osserviamo che

$$\mathcal{D}_\varepsilon \subset \mathcal{A}_\varepsilon \subset \mathcal{D}_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}$$

infatti

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq \varepsilon^2 \\ \\ \sqrt{x} \leq y \\ \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

implica che $y \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ quindi

$$\mathcal{A}_\varepsilon \subset \mathcal{D}_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}.$$

La funzione integranda è positiva su $\mathcal{A}_\varepsilon$ quindi

$$\iint_{\mathcal{D}_\varepsilon} \dots \leq \iint_{\mathcal{A}_\varepsilon} \dots \leq \iint_{\mathcal{D}_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}} \dots$$

e inoltre possiamo dire che

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{\mathcal{D}_\varepsilon} \frac{x+1}{y}\, dx\, dy &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{y} \int_0^{y^2} (x+1)\, dx\, dy \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \left(\frac{y^3}{2} + y \right) dy = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

3. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \right)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} ds \right) \\ &= \lim_{q\to\infty} \left(\int_{-q}^{q} e^{-t^2}\, dt \right) \left(\int_{-q}^{q} e^{-s^2}\, ds \right) \\ &= \lim_{q\to\infty} \int_{-q}^{q} \int_{-q}^{q} e^{-t^2} e^{-s^2}\, ds\, dt \\ &= \lim_{q\to\infty} \int_{-q}^{q} \int_{-q}^{q} e^{-(t^2+s^2)}\, ds\, dt. \end{aligned}$$

Consideriamo

$$\iint_{B_R(0)} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

dove

$$B_R(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq R^2\}$$

Facciamo un cambio di variabili

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Il dominio diventa $\mathcal{R} = \{(\rho,\theta) :\ 0 \leq \rho \leq R,\ \theta \in [0, 2\pi[\}$.

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} e^{-\rho^2}\rho\,d\theta\,d\rho &= \int_0^{2\pi}\int_0^R \rho\, e^{-\rho^2}\,d\rho \\ &= 2\pi\left[-\frac{1}{2}\,e^{-\rho^2}\right]_0^R \\ &= -\pi(e^{-R^2}-1) = \pi(1-e^{-R^2}) \end{aligned}$$

Dunque

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \lim_{R\to\infty}\pi(1-e^{-R^2}) = \pi$$

e quindi

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}.$$