Tutorato IV (26/03/2003)
(Funzioni differenziabili da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$)

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (\sin(xy),\, e^{xy^2})\,. \end{array}$$

1. Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

2. Usando la definizione, mostrare che f è differenziabile in $(0, 0)$.

3. Sia

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \operatorname{tgh} t + \sqrt{1 + t^2} \end{array}$$

   e si definisca $F(t) \equiv f(g(t),\, 1 - g^2(t))$. Calcolare $F'(0)$.

Esercizio 2. Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ e $h \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
Calcolare:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, h(x, z), z) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial z} f(x, h(x, z), z)\,.$$

Esercizio 3.

1. Dimostrare che se $y = f(x)$ è una soluzione C^2 in un intorno di $x = 0$ dell'equazione

$$x^2 + \sinh y + e^{xy} = 1$$

   tale che $f(0) = 0$, allora ha un massimo relativo nell'origine.

2. Cosa si può dire relativamente all'esistenza di una funzione siffatta?