Tutorato III (19/03/2003)
(Equazioni differenziali ordinarie)

Esercizio 1. Consideriamo il seguente problema di Cauchy in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{\pi y^2}{(1-2y)^2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{y}{(1-2y)}\right) \\ \\ \dot{y} = 2y^2 \\ \\ x\left(\frac{1}{2}\right) = y\left(\frac{1}{2}\right) = 1\,. \end{cases}$$

Trovare la soluzione di tale problema, il suo intervallo (α, β) di esistenza massimale e disegnarne un grafico approssimativo.

Esercizio 2. Consideriamo il seguente problema di Cauchy in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta\dfrac{\pi}{4}\left(1+\dfrac{x^2}{\beta^2}\right) \\ \dot{y} = \beta\, y \\ x(0) = 0,\ y(0) = 1 \end{cases}$$

al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Trovare la soluzione $\underline{x}(t,\beta)$ al variare di β ed il relativo intervallo di esistenza massimale I_β.

Complementi Es. 1.

1.1 Mostrare che

$$\lim_{t\downarrow\alpha} \operatorname{dist}\left((x(t),y(t)),\ \left\{y = \frac{1}{2}\right\}\right) = 0$$

e

$$\lim_{t\uparrow\beta} |(x(t),y(t))| = +\infty\,.$$

In particolare mostrare che comunque si sceglie un punto $P \in [-1,1]\times\left\{\frac{1}{2}\right\}$, esiste una successione di tempi $t_k \downarrow \alpha$, tale che

$$(x(t_k),y(t_k)) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} P\,.$$

1.2 Dedurre che per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^2 \setminus \left\{y = \frac{1}{2}\right\}$ e per ogni $0 < \delta < \beta - a$, esistono due tempi $t_0 \in (\alpha,\, \alpha+\delta)$ e $t_1 \in (\beta-\delta,\, \beta)$ tali che

$$\begin{aligned} (x(t_0),y(t_0)) &\notin K \\ (x(t_1),y(t_1)) &\notin K\,. \end{aligned}$$

Complementi Es. 2. Mostrare che esiste una $L > 0$ tale che

$$|\underline{x}(t_0,\beta) - \underline{x}(t_0,\beta')| \le L\,|\beta - \beta'|$$

per ogni $\beta,\ \beta' \in K \subset \mathbb{R}\setminus\{0\}$ compatto e per ogni $t_0 \in C \subset \cap_{\beta\in K} I_\beta$ compatto.