Tutorato I (05/03/2003)
(Funzioni continue e spazi di Banach)

Esercizio 1. Sia

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (f_1(x), f_2(x)) \equiv \left(\frac{1}{1+|x|},\ \sin(x_1 x_4) \right) . \end{aligned}$$

Calcolare il modulo di continuità in $x_0 = (0,0,0,0)$.

Esercizio 2. Mostrare che

$$f : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

è continua se e soltanto se sono continue le funzioni componenti

$$f_i : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

per ogni $i = 1, \ldots, m$.

Esercizio 3. (Spazio delle funzioni Lipschitziane)
Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto e si definisca il seguente sottoinsieme di $C(E, \mathbb{R}^m)$:

$$\mathrm{Lip}(E, \mathbb{R}^m) \equiv \left\{ f \in C(E, \mathbb{R}^m) : \quad \|f\|_{\mathrm{Lip}} \equiv \sup_{\substack{x,y \in E \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} + \sup_{x \in E} |f(x)| < \infty \right\}.$$

Si dimostri che $(\mathrm{Lip}(E, \mathbb{R}^m),\ \|\cdot\|_{\mathrm{Lip}})$ è uno spazio di Banach.

Esercizio 4. (Spazi di successioni: ℓ^1 e ℓ^∞)
Sia $x = \{x_n\}_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ una successione a valori reali (o complessi) e definiamo

$$\|x\|_1 \equiv \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \qquad \text{e} \qquad \|x\|_\infty \equiv \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| .$$

Consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} \ell^1 &\equiv \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \quad \|x\|_1 < \infty\} \\ \ell^\infty &\equiv \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \quad \|x\|_\infty < \infty\} . \end{aligned}$$

1 Mostrare che $(\ell^1,\ \|\cdot\|_1)$ e $(\ell^\infty,\ \|\cdot\|_\infty)$ sono spazi di Banach.

2 Mostrare che $\ell^1 \subset \ell^\infty$, ma non è un sottospazio chiuso di $(\ell^\infty,\ \|\cdot\|_\infty)$ (quindi $(\ell^1,\ \|\cdot\|_\infty)$ non è uno spazio di Banach).

3** Qual è la chiusura di ℓ^1 rispetto alla metrica indotta dalla $\|\cdot\|_\infty$?