Esercizi proposti a lezione

AM3 Prof. Luigi Chierchia

A.A. 2003

Esercizio 1 (24/2/03). Sia $X = C([0,1],\mathbb{R})$ mostrare che lo spazio vettoriale X non ammette una base finita.

Esercizio 2 (24/2/03). Siano $X = C([0,1],\mathbb{R})$ e

$$d_\infty(f(x),g(x)) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|$$

$$d(f(x),g(x)) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx$$

due distanze su X e sia, per $n \geq 3$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\ , \\ n(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}) & \text{se } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(i) Dimostrare che f_n *non* è di Cauchy in (X, d_∞).

(ii) Dimostrare che f_n è di Cauchy in (X,d) ma che non esiste f continua t.c. $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$,cioè $d(f_n,f) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (ovvero che (X,d) *non* é uno spazio di Banach).

Esercizio 3 (26/2/03). $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$ $|x\cdot y| \leq |x||y|$,dove $|\ |$ denota la norma euclidea, (Disuguaglianza di Cauchy).

Mostrare che l' uguaglianza vale unicamente qualora x oppure y siano il vettore nullo, o qualora x ed y siano fra loro proporzionali.

Esercizio 4 (26/2/03). Dimostrare che se $E \subset X$ con (X,d) spazio metrico allora:

E è chiuso $\Leftrightarrow \forall x_k \subset E$ di Cauchy $\exists\, x \in E$ t.c. $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$,
cioè $d(x_k,x) \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

Esercizio 5 (12/03/03). Discutere la massimalitá della soluzione del problema di Cauchy dato da:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x^\alpha(t) & \text{con } \alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x(t_0) = x_0 \geq 0 \end{cases}$$

(Discutere anche a priori la regolaritá di x^α su $(0,+\infty)$).