Am 3 -Esercitazione 2
a.a.2002-2003

Laura Di Gregorio

14 marzo 2003

Studio qualitativo

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) = y^2(x) - 1 & \qquad x \in \mathbb{R} \\ y(0) = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

Vale il teorema di esistenza e unicità locale.

Luogo di zeri della derivata:

$$f(x, y(x)) = 0 \Longleftrightarrow y(x) = \pm 1.$$

Supponiamo di fissare il dato iniziale $\alpha = 1$, allora ho il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = y^2(x) - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La soluzione di questo problema è $y(x) \equiv 1$.

Analogamente se fisso il dato iniziale $\alpha = -1$, ho il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = y^2(x) - 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

e la soluzione di questo problema è $y(x) \equiv -1$.

Caso $\alpha \in [-1,1]$:

Per l'unicità, il fatto che le due rette $y(x) = 1$ e $y(x) = -1$ siano soluzioni del problema per un certo α fissato, mi dice che in realtà queste sono due barriere che non possono essere attraversate, quindi se parto con dato iniziale $\alpha \in [-1,1]$ le soluzioni rimangono nell'intervallo $[-1,1]$.

Inoltre, in questo intervallo di soluzioni, vale la stima seguente:

$$|f(x,y(x))| = |y^2(x) - 1| = 1 - y^2(x) \leq 1$$

quindi vale la condizione sufficiente affinché ci siano esistenza e unicità globali.

Per $y(x) \in (-1,1)$ vale inoltre che $y'(x) < 0$ quindi le soluzioni sono monotone decrescenti.
Per quanto detto precedentemente queste sono limitate dall'alto e dal basso, quindi so che esiste il limite per $x \longrightarrow \pm\infty$.

Richiamiamo il seguente:

Teorema (dell'asintoto). *Sia $f : [x_0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Se esiste finito*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \mathrm{l}$$

e se esiste

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f'(x) = \mathrm{m}$$

allora $\mathrm{m} = 0$.

DIM.: Per il teorema di Lagrange risulta

$$f(x+1) - f(x) = f'(\xi)$$

con $\xi \in (x, x+1)$.
Passando al limite per $x \longrightarrow +\infty$ in entrambi i membri ottengo la tesi. $\square$

Usando il teorema appena dimostrato otteniamo che le soluzioni

$$y(x) = \pm 1$$

che appartengono al luogo di zeri della derivata, sono in realtà due asintoti orizzontali per le soluzioni.

Caso $|\alpha| > 1$*:*

Osserviamo subito che se $y(x)$ è soluzione del problema di Cauchy (1) allora anche $-y(-x)$ è soluzione di (1).
Questo mi dice che c'è simmetria rispetto all'origine, quindi è sufficiente studiare il problema per $\alpha > 1$.

Caso $\alpha > 1$*:*

In questo caso $y(x) > 1$ quindi $y'(x) > 0$ su tutto $\mathbb{R}$, la soluzione è crescente. In particolare vale la seguente uguaglianza:

$$|f(x, y(x))| = |y^2(x) - 1| = y^2 - 1.$$

Ci sono due casi da considerare $x > 0$ e $x \leq 0$:

$$\begin{cases} 1 < y(x) \leq \alpha, & \text{se } x \leq 0; \\ y(x) < -1, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Nel primo caso ho abbastanza informazioni per dire che c'è esistenza e unicità nell'intervallo $(-\infty, 0]$ perché so dell'esistenza di un asintoto per $x \longrightarrow -\infty$ e so che la soluzione è sicuramente più piccola di α fino a $x = 0$.

Non so cosa succede dopo $x = 0$.
Posso dire che la soluzione non ammette limite finito per $x > 0$ e $\alpha > 1$ perché se così fosse potrei usare il teorema dell'asintoto e invece risulta

$$y' = y^2 - 1 > 0$$

quindi non c'è asintoto orizzontale.
Devo trovare un altro modo per scoprire il comportamento della soluzione per $x > 0$.

Sia $k > 0$. Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) = ky(x)^2 \\ y(0) = \alpha > 0 \end{cases} \tag{2}$$

La soluzione di questo problema è

$$y(x) = \frac{\alpha}{1 - \alpha k x}$$

ed esplode per

$$x = \frac{1}{\alpha k}.$$

Voglio confrontare il mio problema con questo di cui conosco la soluzione.
Osserviamo che

$$y^2(x) - 1 \geq k y^2(x) \Longleftrightarrow y \geq \frac{1}{\sqrt{1-k}}. \tag{3}$$

Ho che

$$\frac{1}{\sqrt{1-k}} < 1$$

e so che la soluzione di (1) nell'intervallo che sto considerando è sempre maggiore di 1.
Questo mi dice che (3) vale per ogni $1 > k > 0$, cioè la soluzione di (1) esplode in un certo $x^* > 0$.