Soluzioni 5-Am3

Dott. Laura Di Gregorio

31 marzo 2003

1. Chiamo per semplicità F_1 e F_2 le due equazioni di C.
Calcolo le derivate parziali

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial x}\Big|_{(0,0,0)} &= \left[\frac{1}{\cos^2 x} - \cos(y+z-x) - yz\sin(xyz)\right]\Big|_{(0,0,0)} = 0 \\
\frac{\partial F_1}{\partial y}\Big|_{(0,0,0)} &= \big[\cos(y+z-x) - xz\sin(xyz)\big]\Big|_{(0,0,0)} = 1 \\
\frac{\partial F_1}{\partial z}\Big|_{(0,0,0)} &= \big[\cos(y+z-x) - xy\sin(xyz)\big]\Big|_{(0,0,0)} = 1.
\end{aligned}
$$

Analogamente

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_2}{\partial x}\Big|_{(0,0,0)} &= \frac{4yz}{1+4xyz} + \frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}\Big|_{(0,0,0)} = 1 \\
\frac{\partial F_2}{\partial y}\Big|_{(0,0,0)} &= \frac{4xz}{1+4xyz} + \frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}\Big|_{(0,0,0)} = 1 \\
\frac{\partial F_2}{\partial z}\Big|_{(0,0,0)} &= \frac{4yz}{1+4xyz}\Big|_{(0,0,0)} = 0.
\end{aligned}
$$

La matrice Jacobiana è

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Il rango della matrice è 2, quindi posso esplicitare 2 coordinate in funzione dell'altra per il TFI.
In particolare basta uno sviluppo di Taylor al prim'ordine per ottenere un'espressione esplicita locale

$$\begin{cases} z + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

2. Calcoliamo

$$F(0,0,0) = 0$$

e inoltre

$$\begin{aligned}
\det\left(\nabla_y F\right)|_{(0,0,0)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}_{(0,0,0)} \\
&= \begin{vmatrix} e^x + x\cos(y_1y_2)y_2 & x\cos(y_1y_2)y_1 \\ \\ 4y_1^3 & 1 \end{vmatrix}_{(0,0,0)} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0
\end{aligned}$$

Quindi vale il teorema delle funzioni implicite.
La prima stima da verificare è

$$\sup_{|x|\le r} |F(y_0, x)| \le \frac{\rho}{2}$$

e nel nostro caso abbiamo

$$\sup_{|x|\le r} |(\sin x, 3|x|)| \le 3r \le \frac{\rho}{2}$$

da cui ottengo una prima stima su r

$$r \le \frac{\rho}{6}.$$

La seconda stima da verificare è

$$\sup_{\substack{|x|\le r\\|y|\le\rho}} \left\|\mathbb{I}-\nabla_y F\right\| = \sup_{\substack{|x|\le r\\|y|\le\rho}} \left\| \begin{pmatrix} 1-e^x-x\cos(y_1y_2)y_2 & -x\cos(y_1y_2)y_1 \\ -4y_1^3 & 0 \end{pmatrix} \right\| \le \frac{1}{4}$$

Per essere certi della stima, imponiamo che valga su tutti gli elementi della matrice:

$$\begin{aligned} -4y_1^3 &\le 4\rho^3 \le \frac{1}{2} \implies \rho \le \frac{1}{4} \\ -x\cos(y_1y_2)y_1 &\le r\rho \le \frac{\rho^2}{6} \le \frac{1}{4} \implies \rho \le \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ 1-e^x-x\cos(y_1y_2)y_2 &\le 1-e^r+r\rho \le 1-e^{-\frac{\rho}{6}}+\frac{\rho^2}{6} \le \frac{1}{4} \end{aligned}$$

dove ho usato anche la stima ottenuta precedentemente su r in funzione di ρ.

Ovviamente, se $\rho \le \frac{1}{4}$ vale anche che $\rho \le \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Supponiamo di prendere in considerazione il valore

$$\rho = \frac{1}{4}$$

e verifichiamo se questo valore di ρ soddisfa la terza stima.

E' facile vedere che l'ultima stima vale, quindi ho trovato:

$$\rho = \frac{1}{4} \qquad \text{e} \qquad r = \frac{1}{24}.$$